

3. **B** 【解析】A 选项, $\angle ACB$ 不是圆心角; B 选项, $\angle ACB$ 是圆心角; C 选项, $\angle ACB$ 不是圆心角; D 选项, $\angle ACB$ 不是圆心角.

4. **C** 【解析】连结圆上任意两点的线段叫做弦, 经过圆心的弦叫做直径, 直径是弦, 但弦不一定是直径, 故①说法正确, 符合题意; 圆上任意两点间的部分叫做弧, 半圆是弧, 但弧不一定是半圆, 故②说法正确, 符合题意; 半径决定圆的大小, 半径相等的两个圆是等圆, 故③说法正确, 符合题意; 弧可以分为劣弧、优弧、半圆三种, 当一条弦是直径时, 直径把圆分成两个半圆, 既不是优弧也不是劣弧, 故④说法不正确, 不符合题意; 只有在同圆或等圆中, 能够互相重合的弧才是等弧, 故⑤说法错误, 不符合题意. 综上所述, 正确的说法有①②③, 共 3 个, 故选 C.

5. **A** 【解析】 $\because CH \perp AB, \therefore \angle BHC = 90^\circ. \therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle BHC$ 中, 点 M 是 BC 的中点, $\therefore MH = \frac{1}{2}BC. \therefore BC$ 为 $\odot O$ 的弦, \therefore 当 BC 为 $\odot O$ 的直径时, BC 长有最大值, 此时 MH 长有最大值. $\because \odot O$ 的半径是 3, $\therefore MH$ 长的最大值为 3. 故选 A.

6. 1 3 4 【解析】圆中有 AB 1 条直径, AB, CD, EF 3 条弦, 圆中以点 A 为端点的优弧有 4 条. 故答案为 1, 3, 4.

7. 144° 【解析】 \because 一条弦把圆周分成 2:3 的两段弧, \therefore 劣弧所对圆心角的度数为 $\frac{2}{5} \times 360^\circ = 144^\circ$, 故答案为 144°.

8. 60 【解析】如图, 连结 $OA, OB. \because \odot O$ 的直径为 20 cm, $\therefore OA = OB = 10$ cm. $\because AB = 10$ cm, $\therefore OA = OB = AB, \therefore \triangle OAB$ 为等边三角形, $\therefore \angle AOB = 60^\circ$, 即弦 AB 所对圆心角的度数是 60° . 故答案为 60.

9. 18° 【解析】连结 CE, DE , 则 $AE = CE = DE = DB, \therefore \angle ACE = \angle A = 63^\circ$. 设 $\angle DBE = x$, 则 $\angle ECD = \angle EDC = 2x. \because \angle A + \angle ACB + \angle B = 180^\circ, \therefore 63^\circ + 63^\circ + 2x + x = 180^\circ, \therefore x = 18^\circ$.

10. 【解】连结 OC , 如图. $\because OC = OB, \therefore \angle OCB = \angle OBC = 40^\circ, \therefore \angle BOC = 180^\circ - 40^\circ \times 2 = 100^\circ, \therefore \angle AOC = 100^\circ + 30^\circ = 130^\circ. \because OC = OA, \therefore \angle OAC = \angle OCA = 25^\circ$.

2. 圆的对称性

课时 1 弧、弦、圆心角

刷基础

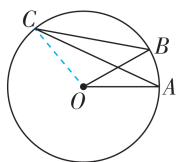
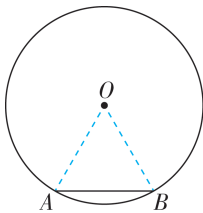
1. **A** 【解析】根据定义, 等弧是能够重合的弧, 是在同圆或等圆中才有, 所以等弧所对的弦

思路分析

由直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半可知 $MH = \frac{1}{2}BC$, 当 BC 为 $\odot O$ 的直径时长度最大, 此时 MH 的长也最大.

易错警示

注意本题 C 选项为易错选项, 在同圆或等圆中, 弧之间存在倍数关系不代表对应的弦之间也存在相同的倍数关系.



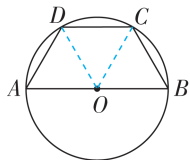
相等, 所以 A 选项的说法正确, 而 B、C、D 选项的说法中忽略了在同圆或等圆中的条件, 都是错误的, 故选 A.

2. **D** 【解析】 $\because \widehat{AE} = \widehat{BD}, \therefore \angle BOD = \angle AOE = 32^\circ. \because \angle BOD = \angle AOC, \therefore \angle AOC = 32^\circ, \therefore \angle COE = 32^\circ + 32^\circ = 64^\circ$. 故选 D.

3. **B** 【解析】如图, 连结

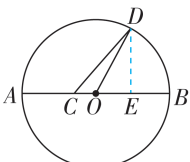
$OD, OC. \because \widehat{AD} = \widehat{DC} = \widehat{CB}, \therefore \angle AOD = \angle DOC = \angle COB$.

$\because AB$ 是直径, $\therefore \angle AOD + \angle DOC + \angle COB = 180^\circ, \therefore \angle AOD = \angle DOC = \angle COB = 60^\circ. \because OA = OD, \therefore \triangle AOD$ 是等边三角形, $\therefore AD = OD = OA$. 同理, 得 $OC = OD = CD, OC = OB = BC, \therefore AD = CD = BC = OA, \therefore$ 四边形 $ABCD$ 的周长为 $AD + CD + BC + AB = 5OA = 5 \times 2 = 10$ (cm), 故选 B.

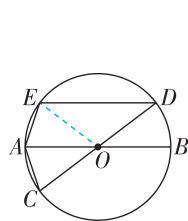


4. **C** 【解析】 $\because OB \perp AC, OA = OC, \therefore \angle AOB = \angle BOC, \therefore \widehat{AB} = \widehat{BC}$, 故 A 选项的说法正确. $\because BC = CD, \therefore \widehat{BC} = \widehat{CD}, \therefore \widehat{AC} = \widehat{BD}, \therefore \angle AOC = \angle BOD$, 故 B 选项的说法正确. $\because \widehat{AC} = \widehat{BD}, \therefore AC = BD. \because BD < BC + CD = 2CD, \therefore AC < 2CD$, 故 C 选项的说法错误. $\because BC = CD, \therefore \angle BOC = \angle COD$. 又 $\because OB = OD, \therefore OC \perp BD$, 故 D 选项的说法正确. 故选 C.

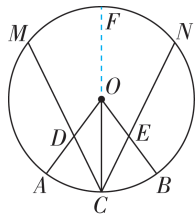
5. $2\sqrt{13}$ 【解析】如图, 过 D 作 $DE \perp AB$ 于 E , 则 $\angle DEC = 90^\circ. \because$ 点 C 是直径 AB 的三等分点 ($AC < CB$), 直径 $AB = 12, \therefore AC = 4, BC = 8, OD = OA = OB = 6, \therefore CO = 2. \because$ 点 D 是弧 ADB 的三等分点 (弧 $BD <$ 弧 AD), $\therefore \angle DOB = \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ, \therefore \angle ODE = 30^\circ, \therefore OE = \frac{1}{2}OD = 3, \therefore DE = \sqrt{DO^2 - OE^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}, CE = OE + CO = 3 + 2 = 5, \therefore DC = \sqrt{DE^2 + CE^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 5^2} = 2\sqrt{13}$, 故答案为 $2\sqrt{13}$.



6. 3 【解析】连结 OE , 如图. $\because OE = OD, \therefore \angle D = \angle OED. \because DE \parallel AB, \therefore \angle AOC = \angle D = \angle OED = \angle AOE, \therefore AC = AE = 3$, 故答案为 3.



(第 6 题图)



(第 7 题图)

7. 【证明】延长 CO 交 $\odot O$ 于点 F , 则 CF 为 $\odot O$ 的直径, 如图. $\because \widehat{AC} = \widehat{BC}, \therefore \angle AOC = \angle BOC. \therefore$ 点

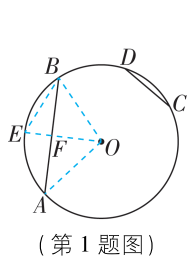
D, E 分别是 OA, OB 的中点, 且 $OA=OB, \therefore OD=OE$. 在 $\triangle OCD$ 和 $\triangle OCE$ 中, $\begin{cases} OD=OE, \\ \angle COD=\angle COE, \\ OC=OC, \end{cases}$
 $\therefore \triangle OCD \cong \triangle OCE$ (S. A. S.), $\therefore \angle MCF = \angle NCF, \therefore \widehat{FM} = \widehat{FN}$. $\therefore CF$ 是 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore \widehat{FMC} = \widehat{FNC}, \therefore \widehat{MC} = \widehat{NC}, \therefore CM = CN$.

8. B 【解析】A 选项, 圆既是轴对称图形, 又是中心对称图形, 正确; B 选项, 圆的每一条直径所在的直线都是它的对称轴, 原说法不正确; C 选项, 圆有无数条对称轴, 正确; D 选项, 圆的对称中心是它的圆心, 正确. 故选 B.

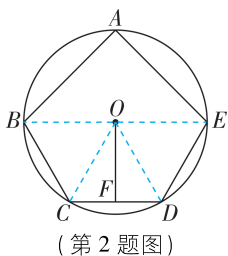
9. 4π 【解析】由题意易得 $S_{\text{阴影}} = \frac{1}{2} S_{\text{大}\odot O} - \frac{1}{2} S_{\text{小}\odot O} = \frac{1}{2} (\pi \times 9 - \pi \times 1) = 4\pi$. 故答案为 4π .

刷提升

1. D 【解析】如图, 取 \widehat{AB} 的中点 E , 连结 OE 交 AB 于 F , 连结 BE, OA, OB , $\therefore \widehat{AB} = 2\widehat{EB} = 2\widehat{AE}$, $\therefore \angle BOF = \angle AOF$. $\therefore OA = OB, \therefore BF = \frac{1}{2} AB = 3$, $OE \perp AB, \therefore BE > BF$, 即 $BE > 3$. $\therefore \widehat{AB} = 2\widehat{CD}$, $\therefore \widehat{CD} = \widehat{EB}, \therefore CD = BE > 3$, \therefore 结合选项可知 CD 的长可能是 4. 故选 D.



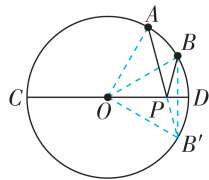
(第 1 题图)



(第 2 题图)

2. A 【解析】如图, 连结 OB, OC, OD, OE . $\therefore \widehat{AB} = 90^\circ, AB = AE, \therefore \widehat{BE} = 2\widehat{AB} = 180^\circ$. $\therefore BC = CD = DE, \therefore \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$, $\therefore \angle COD = 60^\circ$. 又 $\therefore OC = OD, \therefore \triangle COD$ 是等边三角形, $\therefore \angle ODF = 60^\circ$. $\therefore F$ 为 CD 的中点, $\therefore OF \perp CD, \therefore OF = OD \cdot \sin \angle ODF = 6 \times \sin 60^\circ = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, 故选 A.

3. $2\sqrt{2}$ 【解析】如图, 作点 B 关于 CD 的对称点 B' , 连结 AB' 交 CD 于点 P , 此时 $AP + BP$ 有最小值, 即为 AB' 的长. 连结 OA, OB, OB' . \therefore 点 A 是半圆上的三等分点, $\therefore \angle AOD = 60^\circ$. \therefore 点 B 是弧 AD 的中点, $\therefore \angle BOD = 30^\circ$. 由轴对称的性质可知, $\angle B'OD = \angle BOD = 30^\circ$,



关键点拨

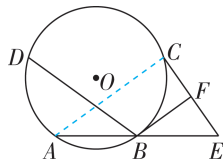
作 $OC \perp AB$ 于 C . 根据翻折的性质得到 $OC = \frac{1}{2} OA$ 是本题解题的关键.

思路分析

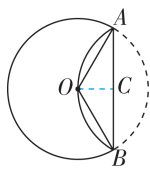
作点 B 关于 CD 的对称点 B' , 连结 AB' 交 CD 于点 P , 此时 $AP + BP$ 有最小值, 即为 AB' 的长. 连结 OA, OB, OB' . 根据圆的性质和轴对称的性质, 得出 $\angle AOB' = 90^\circ, OA = OB = OB' = 2$, 再利用勾股定理求出 AB' 的长, 即可得到 $AP + BP$ 的最小值.

$PB = PB', \therefore \angle AOB' = \angle AOD + \angle B'OD = 90^\circ$. $\therefore CD = 4, \therefore OA = OB = OB' = 2, \therefore$ 由勾股定理得 $AB' = \sqrt{OA^2 + OB'^2} = 2\sqrt{2}, \therefore AP + BP = AP + B'P = AB' = 2\sqrt{2}$. 故答案为 $2\sqrt{2}$.

4. 12 【解析】如图, 连结 AC . $\therefore F$ 是 EC 的中点, $\therefore CF = EF$. $\therefore BE = AB, \therefore BF$ 是 $\triangle EAC$ 的中位线, $\therefore BF = \frac{1}{2} AC$. $\therefore \widehat{AD} = \widehat{BC}, \therefore \widehat{AD} + \widehat{AB} = \widehat{BC} + \widehat{AB}, \therefore \widehat{DB} = \widehat{AC}, \therefore BD = AC, \therefore BF = \frac{1}{2} BD, \therefore BD = 2BF = 12$ cm. 故答案为 12.



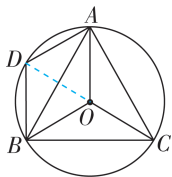
5. 120 【解析】如图, 过点 O 作 $OC \perp AB$ 于 C . 由题意得 $OC = \frac{1}{2} OA, \therefore \angle OAC = 30^\circ$. $\therefore OA = OB, \therefore \angle OBA = \angle OAC = 30^\circ, \therefore \angle AOB = 120^\circ$. 故答案为 120.



6. 【证明】(1) $\therefore \widehat{AB} = \widehat{AC}, \therefore AB = AC. \therefore \angle ACB = 60^\circ, \therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore AB = BC = CA, \therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle AOC$.

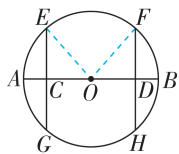
(2) 连结 OD , 如图. $\therefore \angle AOB = \angle BOC = \angle AOC, \therefore \angle AOB = 120^\circ. \therefore D$

是 \widehat{AB} 的中点, $\therefore \widehat{AD} = \widehat{BD}, \therefore \angle AOD = \angle BOD = 60^\circ$. 又 $\therefore OD = OA, OD = OB, \therefore \triangle OAD$ 和 $\triangle OBD$ 都是等边三角形, $\therefore OA = AD = OD, OB = BD = OD, \therefore OA = AD = DB = BO, \therefore$ 四边形 $OADB$ 是菱形.



刷素养

7. (1) 【解】如图, 连结 EO , 设 $\odot O$ 的半径为 r . $\therefore EG \perp AB, \therefore$ 易得 $CE = CG = \frac{1}{2} EG = 4$.



$\therefore AC = 2, \therefore OC = r - 2$. 在 $\text{Rt} \triangle CEO$ 中, $OE^2 = CE^2 + OC^2, \therefore r^2 = 4^2 + (r - 2)^2$, 解得 $r = 5, \therefore \odot O$ 的半径为 5.

(2) 【证明】如图, 连结 OF . $\therefore AC = BD, OA = OB, \therefore OC = OD. \therefore EG \perp AB, FH \perp AB,$

\therefore 在 $\text{Rt} \triangle COE$ 和 $\text{Rt} \triangle DOF$ 中, $\begin{cases} OC=OD, \\ OE=OF, \end{cases}$ $\therefore \text{Rt} \triangle COE \cong \text{Rt} \triangle DOF, \therefore \angle AOE = \angle BOF, \therefore \widehat{AE} = \widehat{BF}$.

(3) 【解】 $\widehat{AE} = \widehat{EF} = \widehat{FB}$ 成立, 理由如下: $\therefore C, D$ 分别为 OA, OB 的中点, $\therefore OC = \frac{1}{2} OA = \frac{1}{2} OE,$

$$\therefore \cos \angle AOE = \frac{OC}{OE} = \frac{1}{2}, \therefore \angle AOE = 60^\circ. \text{ 同理,}$$

$$\angle BOF = 60^\circ, \therefore \angle EOF = 60^\circ, \therefore \widehat{AE} = \widehat{EF} = \widehat{FB}.$$

课时2 * 垂径定理

刷基础

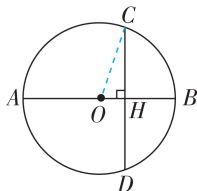
1. **C** 【解析】如图, 连结 OC . $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,

$$CD \perp AB, \therefore CH = \frac{1}{2}CD =$$

$$12, \therefore \text{在 Rt} \triangle OCH \text{ 中, } OH =$$

$$\sqrt{OC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} =$$

$$5, \text{ 故选 C.}$$



思路分析

连结 OC , 根据垂径定理求得 CH 的长, 再根据勾股定理即可求解.

2. **D** 【解析】如图, 连结 OD . 由题意得 $OA =$

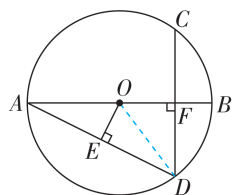
$$OB = OD = 5. \because BF = 2, \therefore \text{在 Rt} \triangle OFD \text{ 中, } DF =$$

$$\sqrt{OD^2 - OF^2} = \sqrt{5^2 - (5-2)^2} = 4, \therefore \text{在 Rt} \triangle ADF \text{ 中,}$$

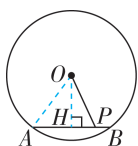
$$AD = \sqrt{AF^2 + DF^2} = \sqrt{(10-2)^2 + 4^2} = 4\sqrt{5}.$$

$$\because OE \perp AD, \therefore AE = DE = 2\sqrt{5}, \therefore \text{在 Rt} \triangle AOE \text{ 中,}$$

$$OE = \sqrt{OA^2 - AE^2} = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{5})^2} = \sqrt{5}, \text{ 故选 D.}$$



(第2题图)



(第3题图)

3. **B** 【解析】过点 O 作 $OH \perp AB$ 于 H , 连结 OA , 如图, 则 $AH = BH = \frac{1}{2}AB = 3$. 在 $\text{Rt} \triangle OAH$ 中,

$$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4, \text{ 所以 } 4 \leq OP <$$

$$5. \text{ 故选 B.}$$

4. 【解】 $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $CD \perp AB$, $CD = 8$,

$$\therefore \angle CEO = 90^\circ, CE = ED = 4. \text{ 设 } \odot O \text{ 的半径为 } r, \therefore EB = 2, \therefore OE = r - 2. \therefore \text{在 Rt} \triangle OEC \text{ 中, } r^2 =$$

$$(r-2)^2 + 4^2, \text{ 解得 } r = 5, \therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5.$$

5. **D** 【解析】A 选项, 两条直径互相平分, 但不一定垂直, 故本选项的说法错误, 不符合题意; B 选项, 平分一条弧的直径垂直于这条弧所对的弦, 故本选项的说法错误, 不符合题意; C 选项, 弦的垂直平分线必经过这条弦所在圆的圆心, 故本选项的说法错误, 不符合题意; D 选项, 平分弧的直径垂直平分这条弧所对的弦, 故本选项的说法正确, 符合题意. 故选 D.

6. **5** 【解析】连结 OA . $\because \odot O$ 的弦 AB 和直径 CD 交于点 E , 且 CD 平分 AB , $\therefore AB \perp CD$, $AE =$

$$\frac{1}{2}AB = 4. \text{ 设 } \odot O \text{ 的半径为 } r, \text{ 则 } OE = OC - CE =$$

$$r - 2. \therefore \text{在 Rt} \triangle OAE \text{ 中, } r^2 = 4^2 + (r-2)^2, \text{ 解得 } r = 5.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5.$$

$$\therefore \odot O \text{ 的半径为 } 5.$$

$r - 2, OA = r$. 在 $\text{Rt} \triangle AOE$ 中, 由勾股定理, 得 $AE^2 + OE^2 = OA^2$, 即 $4^2 + (r-2)^2 = r^2$, 解得 $r = 5$, 故答案为 5.

7. $(\sqrt{2} + 1)$ 【解析】如图, 设圆心角为 90° 的圆弧所在圆的圆心为 O , 连结

OA, OD, AD, OE , 设 OE 交 AD

于点 F , 则 $\angle AOD = 90^\circ$, 且

$OA = OD, \therefore \triangle OAD$ 是等腰直

角三角形, 且 $AD = 2. \therefore E$ 是

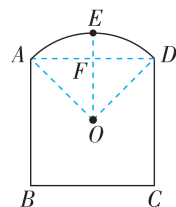
\widehat{AD} 的中点, $\therefore OE \perp AD, \therefore AF =$

$DF = \frac{1}{2}AD = 1. \because \angle AOD = 90^\circ, \therefore OF = \frac{1}{2}AD =$

$1, \therefore OA = OD = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = OE, \therefore EF = \sqrt{2} -$

$1, \therefore \text{点 } E \text{ 到门框底 } BC \text{ 的距离是 } \sqrt{2} - 1 + 2 =$

$(\sqrt{2} + 1) \text{ m.}$



8. 【证明】如图所示, 连结 $DO, EO. \because D$ 是 \widehat{AB} 的

中点, E 是 \widehat{AC} 的中点, $\therefore OD \perp AB, OE \perp AC.$

$\because OD = OE, \therefore \angle EDO = \angle DEO, \therefore \angle DMB =$

$180^\circ - 90^\circ - \angle EDO, \angle ENC = 180^\circ - 90^\circ -$

$\angle DEO, \therefore \angle DMB = \angle ENC. \because \angle AMN =$

$\angle DMB, \angle ANM = \angle ENC, \therefore \angle AMN = \angle ANM,$

$\therefore AM = AN.$

关键点拨

当 OP 与 OH 重合时取得最小值 4, P 从 H 运动到 A 或 B 的过程中, OP 的值越来越大, 若 P 与点 A (B) 重合, 则 $OP = 5$, 进而得出 $4 \leq OP < 5$.

易错警示

求两条平行的弦之间的距离有两种情况, 需分类讨论: ①弦位于圆心的同侧; ②弦位于圆心的异侧. 常常因只考虑其中的一种情况而漏解.

刷易错

9. 14 或 2 【解析】作 $OC \perp EF$ 于点 $C, OD \perp MN$

于点 D , 连结 $OE, OM. \because MN \parallel EF, \therefore O, C, D$

三点共线. ①当弦 MN 和弦 EF 在圆心同侧时, 如图 (1). $\because EF = 16 \text{ cm}, MN = 12 \text{ cm},$

$\therefore CE = 8 \text{ cm}, DM = 6 \text{ cm}. \because OE = OM = 10 \text{ cm},$

$\therefore CO = 6 \text{ cm}, OD = 8 \text{ cm}, \therefore CD = OD - OC =$

2 cm.

②当弦 MN 和弦 EF 在圆心异侧时, 如图 (2).

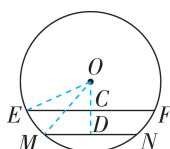
$\because EF = 16 \text{ cm}, MN = 12 \text{ cm}, \therefore CE = 8 \text{ cm}, DM =$

$6 \text{ cm}. \because OE = OM = 10 \text{ cm}, \therefore CO = 6 \text{ cm}, OD =$

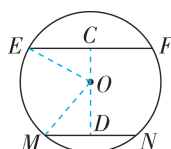
$8 \text{ cm}, \therefore CD = OC + OD = 14 \text{ cm.}$

综上, 弦 MN 和 EF 之间的距离为 14 cm

或 2 cm.



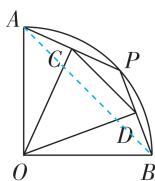
图(1)



图(2)

刷提升

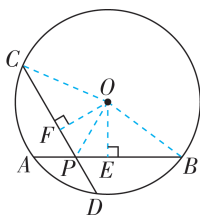
1. **B** 【解析】如图, 连结 AB .
 $\because \angle AOB = 90^\circ, OA = OB = 1,$
 $\therefore AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$
 $\because OC \perp AP, OD \perp PB,$
 $\therefore AC = CP, PD = DB, \therefore CD$ 是



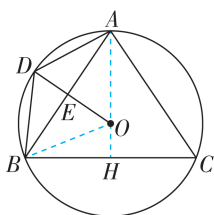
关键点拨
 由垂径定理可知, C 是 AP 的中点, D 是 BP 的中点, 所以 CD 是 $\triangle ABP$ 的中位线, 所以求出 AB 的长即可求出 CD 的长.

$\triangle PAB$ 的中位线, $\therefore CD = \frac{1}{2}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 故选 B.

2. **C** 【解析】如图, 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于点 E , 作 $OF \perp CD$ 于点 F , 连结 OB, OC, OP .
 $\because \angle APC = 60^\circ, \therefore \angle BPC = 180^\circ - \angle APC = 120^\circ.$
 $\because \odot O$ 的半径为 5, $\therefore OB = OC = 5.$
 $\because AB = CD = 8, OE \perp AB, OF \perp CD, \therefore AE = BE = \frac{1}{2}AB = 4, CF = DF = \frac{1}{2}CD = 4, \therefore OE = \sqrt{OB^2 - BE^2} = 3, OF = \sqrt{OC^2 - CF^2} = 3, \therefore OE = OF.$
 又 $\because OE \perp AB, OF \perp CD, \therefore PO$ 平分 $\angle BPC, \therefore \angle OPE = \frac{1}{2} \angle BPC = 60^\circ.$ 在 $Rt\triangle OPE$ 中, $PE = \frac{OE}{\tan \angle OPE} = \frac{3}{\tan 60^\circ} = \sqrt{3},$
 $\therefore AP = AE - PE = 4 - \sqrt{3}$, 故选 C.



(第 2 题图)



(第 3 题图)

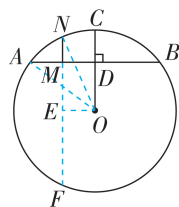
3. $\frac{48}{5}$ 【解析】连结 AO 并延长交 BC 于点 H , 连结 OB , 如图. 设 $\odot O$ 的半径为 r , 则 $OA = OD = r, OE = r - 2.$
 $\because D$ 是 \widehat{AB} 的中点, $\therefore OD \perp AB, \therefore AE = BE = \frac{1}{2}AB = 4.$ 在 $Rt\triangle AOE$ 中, 由勾股定理得 $OE^2 + AE^2 = OA^2$, 即 $(r - 2)^2 + 4^2 = r^2$, 解得 $r = 5$, 即 $\odot O$ 的半径为 5. $\because AB = AC, \therefore \widehat{AB} = \widehat{AC}, \therefore AH \perp BC, BH = CH.$ 在 $Rt\triangle OBH$ 中, $BH^2 + OH^2 = 5^2$, ① 在 $Rt\triangle ABH$ 中, $BH^2 + AH^2 = AB^2$, 即 $BH^2 + (5 + OH)^2 = 8^2$, ② ② - ① 得 $25 + 10OH = 64 - 25$, 解得 $OH = \frac{7}{5}, \therefore BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{7}{5}\right)^2} = \frac{24}{5}, \therefore BC = 2BH = \frac{48}{5}.$ 故答案为 $\frac{48}{5}.$

切入点. (构造模型)

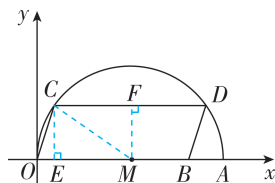
关键点. (数学建模)

卡壳点. (吃刀深度)

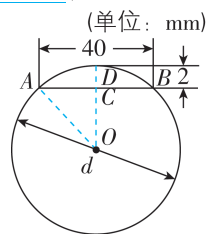
4. $\frac{21}{2}$ 【解析】连结 AO, ON , 延长 NM 交 $\odot O$ 于 F , 过 O 作 $OE \perp NF$ 于 E , 如图. 设 $\odot O$ 的半径为 $r, AD = t. \because CD \perp AB, MN \parallel CD, OE \perp NF,$
 $\therefore \angle ODM = \angle DME = \angle MEO = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $MEOD$ 是矩形, $\therefore OE = DM = \frac{1}{2}t, OD = ME = r - 5.$ 在 $Rt\triangle AOD$ 中, $(r - 5)^2 + t^2 = r^2$, ① 在 $Rt\triangle NOE$ 中, $(r - 5 + 4)^2 + \left(\frac{1}{2}t\right)^2 = r^2$, ② ② \times 4 - ① 得 $2r - 21 = 0$, 解得 $r = \frac{21}{2}$, 即 $\odot O$ 的半径长为 $\frac{21}{2}.$ 故答案为 $\frac{21}{2}.$



5. (2, 6) 【解析】 \because 四边形 $OCDB$ 是平行四边形, $B(16, 0), \therefore CD \parallel OA, CD = OB = 16.$ 如图, 过点 C 作 $CE \perp OA$ 于点 E , 过点 M 作 $MF \perp CD$ 于点 F , 则 $CF = \frac{1}{2}CD = 8$, 易得四边形 $CEMF$ 是矩形, $\therefore ME = CF, MF = CE. \because A(20, 0), \therefore OM = \frac{1}{2}OA = 10, \therefore OE = OM - ME = OM - CF = 10 - 8 = 2.$ 连结 MC , 则 $MC = \frac{1}{2}OA = 10, \therefore$ 在 $Rt\triangle CMF$ 中, 由勾股定理得 $MF = \sqrt{MC^2 - CF^2} = 6, \therefore CE = 6, \therefore$ 点 C 的坐标为 $(2, 6).$ 故答案为 $(2, 6).$



6. 【解】(1) 如图, 设圆心为 O , 过点 O 作 $OC \perp AB$ 于点 C, OC 的延长线交 $\odot O$ 于点 D , 连结 $OA.$
 $\because OC \perp AB, AB = 40,$
 $\therefore AC = BC = 20.$
 设 $OA = r$ mm.
 $\because CD = 2, \therefore OC = r - 2.$ 在 $Rt\triangle AOC$ 中, 根据勾股定理得 $AC^2 + OC^2 = OA^2$, 即 $20^2 + (r - 2)^2 = r^2$, 解得 $r = 101,$
 $\therefore d = 2 \times 101 = 202$, 即 d 的值为 202.
 (2) 当 $CD = 4$ 时, $OC = r - 4 = 97.$
 $\because OC \perp AB, \therefore AC = BC.$ 在 $Rt\triangle AOC$ 中, 根据勾股定理得 $AC^2 + OC^2 = OA^2$, 即 $AC^2 + 97^2 = 101^2$, 解得 $AC = 6\sqrt{22}, \therefore AB = 12\sqrt{22}, \therefore$ 轴上铣出平面的宽度为 $12\sqrt{22}$ mm.



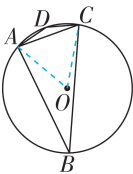
刷素养

7. 【解】(1) 如图, 作 $OH \perp MN$ 于 H , 连结 $ON.$
 $\because AP = 2, BP = 6, \therefore AB = 8, \therefore OA = 4, OP = 2.$ 在 $Rt\triangle POH$ 中, $\because \angle OPH = 45^\circ, \therefore$ 易得 $OH =$

$\therefore \angle BEC = \angle BAC = 40^\circ$. 故选 C.

9. 60 【解析】 \because 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $\therefore \angle B + \angle D = 180^\circ$. \because 四边形 $OABC$ 是菱形, $\therefore \angle B = \angle AOC$, $\therefore \angle AOC + \angle D = 180^\circ$. 由圆周角定理得 $\angle D = \frac{1}{2} \angle AOC$, $\therefore \angle D = 60^\circ$, 故答案为 60.

10. 2 【解析】连结 OA, OC , 如图. \because 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, $\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180^\circ$. $\therefore \angle ADC = 150^\circ$, $\therefore \angle ABC = 30^\circ$, $\therefore \angle AOC = 2\angle ABC = 60^\circ$. $\because OA = OC$, $\therefore \triangle OAC$ 为等边三角形, $\therefore OA = AC = 2$, 即 $\odot O$ 的半径为 2. 故答案为 2.

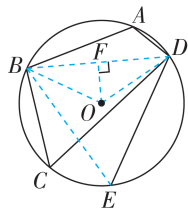


刷提升

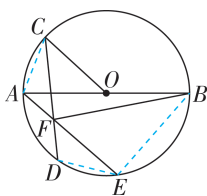
1. A 【解析】连结 BE, DC . $\because BC$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle BEC = 90^\circ$. $\because \angle A = 35^\circ$, $\therefore \angle ABE = 90^\circ - \angle A = 55^\circ$, $\therefore \angle DBE = 125^\circ$. \because 四边形 $EBDC$ 是圆内接四边形, $\therefore \angle ECD + \angle DBE = 180^\circ$, $\therefore \angle ECD = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ$, $\therefore \angle DOE = 2\angle ECD = 110^\circ$, 故选 A.

2. A 【解析】 $\because AB \parallel CD$, $\therefore \angle CDB = \angle ABD$. $\because \angle DCA = \angle ABD$, $\therefore \angle CDB = \angle DCA = \angle ABD$. $\because \angle CDB + \angle DCA = \angle DEA$, $\therefore 2\angle DCA = \angle DEA$. $\because 2\angle ABD = \angle AOD$, $\therefore \angle DEA = \angle AOD$. 故选 A.

3. B 【解析】如图, 连结 BE, BD, OB, OD , 过点 O 作 $OF \perp BD$ 于点 F . \because 点 E 为弧 BCD 的中点, $\therefore \widehat{BE} = \widehat{DE}$, $\therefore BE = DE$. \because 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $\angle A = 120^\circ$, $\therefore \angle E = \angle C = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $\therefore \triangle BED$ 是等边三角形, $\therefore BD = DE$. $\because \angle BOD = 2\angle E = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$, $OF \perp BD$, $OB = OD$, $\therefore \angle BOF = 60^\circ$, $BD = 2BF$, $\therefore BF = BO \cdot \sin \angle BOF = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\therefore DE = DB = 2BF = 3\sqrt{3}$, 故选 B.



(第3题图)



(第4题图)

4. $2\sqrt{5} - 3$ 【解析】如图, 连结 AC, DE, BE . $\because \angle ACF = \angle DEF$, $\angle AFC = \angle DFE$, $AF = DF$, $\therefore \triangle AFC \cong \triangle DFE$, $\therefore CF = EF$. $\because OC = CF$, $\odot O$ 的半径长为 3, $\therefore CF = EF = OC = 3$, $AB = 6$. $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle AEB = 90^\circ$. \because 在 $\text{Rt} \triangle BFE$ 中, $BE = \sqrt{BF^2 - EF^2} = 4$, \therefore 在 $\text{Rt} \triangle ABE$ 中, $AE = \sqrt{AB^2 - BE^2} = 2\sqrt{5}$, $\therefore AF =$

思路分析

(1) 在 PC 上截取 $PD = AP$, 连结 AD , 可得 $\triangle APD$ 是等边三角形, 再根据题目条件证明 $\triangle APB \cong \triangle ADC$, 得出 $BP = CD$, 进而可得结论.

思路分析

连结 AC, DE, BE . 先证明 $\triangle AFC \cong \triangle DFE$, 推出 $CF = EF = 3$, 再推出 $\angle AEB = 90^\circ$, 最后在 $\text{Rt} \triangle BFE$ 和 $\text{Rt} \triangle ABE$ 中利用勾股定理计算即可求解.

$AE - EF = 2\sqrt{5} - 3$, 故答案为 $2\sqrt{5} - 3$.

5. 1.4 【解析】 $\because E$ 是 AD 的中点, OC 是半径, $\therefore \widehat{AC} = \widehat{CD}$, $OC \perp AD$, $\therefore \angle CAD = \angle CBA$. $\because AB$ 是直径, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$. $\because OC \perp AD$, $\therefore \angle AEC = 90^\circ$, $\therefore \angle AEC = \angle ACB$. 又 $\because \angle CAD = \angle CBA$, $\therefore \triangle AEC \sim \triangle BCA$, $\therefore \frac{CE}{AC} = \frac{AC}{BA}$, 即 $\frac{CE}{6} = \frac{6}{10}$, $\therefore CE = 3.6$. $\because OC = \frac{1}{2}AB = 5$, $\therefore OE = OC - EC = 5 - 3.6 = 1.4$. 故答案为 1.4.

6. (1) 【证明】 $\because \angle ADE = \angle ACE$, $\angle ADE = \angle B$, $\therefore \angle B = \angle ACE$. $\because CE \parallel AB$, $\therefore \angle BAC = \angle ACE$, $\therefore \angle B = \angle BAC$, $\therefore AC = BC$.

(2) 【解】 $\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ADC = 90^\circ$.

$\because \tan B = \frac{AD}{BD} = 2$, \therefore 设 $BD = x$, 则 $AD = 2x$.

$\because CD = 3$, $\therefore AC = BC = x + 3$. 在 $\text{Rt} \triangle ACD$ 中, $AD^2 + CD^2 = AC^2$, $\therefore 4x^2 + 9 = (x + 3)^2$, $\therefore x = 2$ ($x = 0$ 已舍去), $\therefore BD = 2$, $AD = 4$, $AC = 5$. 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, $AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$. 连结 AE , 如图.

$\because AC$ 是 $\odot O$ 的直径,

$\therefore \angle AEC = 90^\circ$. $\because \angle B =$

$\angle ADE$, $\angle ACB = \angle AED$,

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ADE$,

$\therefore \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$. $\because AC = BC$,

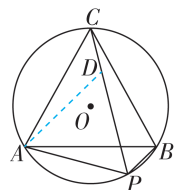
$\therefore AE = DE$. $\because \angle ACE = \angle ADE = \angle B$, $\therefore \tan B =$

$\tan \angle ACE = \frac{AE}{CE} = 2$, $\therefore CE = \frac{1}{2}AE$. 在 $\text{Rt} \triangle ACE$

中, $AE^2 + CE^2 = AC^2$, $\therefore AE^2 + \frac{1}{4}AE^2 = 25$, $\therefore AE =$

$DE = 2\sqrt{5}$.

7. (1) 【证明】在 PC 上截取 $PD = AP$, 连结 AD , 如图(1). $\because \angle APB = 120^\circ$, PC 平分 $\angle APB$, $\therefore \angle APC = 60^\circ$, $\therefore \triangle APD$ 是等边三角形, $\therefore AD = AP = PD$, $\angle ADP = 60^\circ$, $\therefore \angle ADC = \angle APB = 120^\circ$.



图(1)

在 $\triangle APB$ 和 $\triangle ADC$ 中, $\begin{cases} \angle APB = \angle ADC, \\ \angle ABP = \angle ACD, \\ AP = AD, \end{cases}$

$\therefore \triangle APB \cong \triangle ADC$ (A. A. S.), $\therefore BP = CD$.

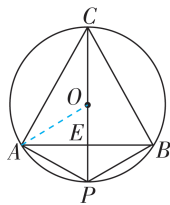
又 $\because PD = PA$, $\therefore PA + PB = PC$.

(2) 【解】如图(2), 取 \widehat{AB} 的中点 P , 易知 C, O, P 三点共线, 设 PC 交 AB 于点 E .

\because 四边形 $APBC$ 内接于 $\odot O$, $\angle APB = 120^\circ$, PC 平分 $\angle APB$, $\therefore \angle ACB = 60^\circ$, $\widehat{AC} = \widehat{BC}$, $\therefore AC =$

BC , $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形.

\because 点 P 是 \widehat{AB} 的中点, $\therefore OP \perp AB, AE = BE$. $\because \odot O$ 的半径为 1, $\therefore AO = 1$, \therefore 易得 $EO = PE = \frac{1}{2}$, $AE = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore AB = \sqrt{3}$,



图(2)

$\therefore S_{\triangle APB} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4}$. 故当点 P 位于 \widehat{AB} 的中点时, $\triangle APB$ 的面积最大, 最大面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

刷素养

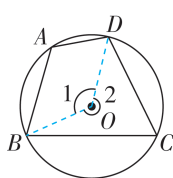
8. (1) 【证明】如图(1), 连结 OB, OD .

$\because \angle A = \frac{1}{2} \angle 2, \angle C = \frac{1}{2} \angle 1$, 且 $\angle 1 + \angle 2 = 360^\circ$,

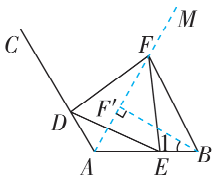
$\therefore \angle A + \angle C = \frac{1}{2} \angle 1 + \frac{1}{2} \angle 2 = 180^\circ$.

同理 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$,

$\therefore \angle A + \angle C = \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.



图(1)



图(2)

(2) $\angle A + \angle BED < \angle C$

(3) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 【解析】连结 AF , 如图(2). $\because \triangle DEF$ 是

等边三角形, $\therefore \angle EDF = \angle EFD = 60^\circ$. $\because \angle BAC = 120^\circ$, $\therefore \angle BAC + \angle EFD = 180^\circ$, $\therefore A, D, F, E$ 四点共圆, $\therefore \angle BAF = \angle EDF = 60^\circ$, \therefore 在 $\angle BAC$ 内部作 $\angle BAM = 60^\circ$, 则点 F 始终在射线 AM 上运动. 过点 B 作 $BF' \perp AF$ 于 F' . 由垂线段最短可知, 当 $BF \perp AM$, 即点 F 位于点 F' 处时, BF 最小. 在 $\text{Rt} \triangle ABF'$ 中, $\angle 1 = 90^\circ - \angle BAF' = 30^\circ$, $\therefore AF' = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times$

$\frac{8}{3} = \frac{4}{3}$, $\therefore BF' = \sqrt{AB^2 - AF'^2} = \sqrt{\left(\frac{8}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2} =$

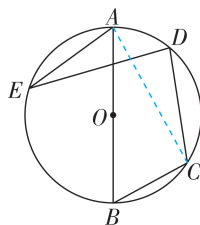
$\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 故 BF 的最小值为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$, 故答案为 $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

微专题

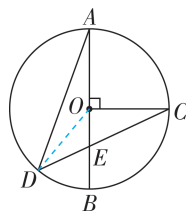
1. C 【解析】如图, 连结 AC . $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$. $\because \angle AED = 20^\circ$, $\therefore \angle ACD = \angle AED = 20^\circ$, $\therefore \angle BCD = \angle ACB + \angle ACD = 110^\circ$. 故选 C.

思路分析

(3) 连结 AF . 由 $\triangle DEF$ 是等边三角形得出 $\angle EDF = \angle EFD = 60^\circ$, 结合 $\angle BAC = 120^\circ$ 可得出 A, D, F, E 四点共圆. 由同圆或等圆中, 同弧所对的圆周角相等得到 $\angle BAF = \angle EDF = 60^\circ$. 在 $\angle BAC$ 内部作 $\angle BAM = 60^\circ$, 可知点 F 始终在射线 AM 上运动. 过点 B 作 $BF' \perp AF$ 于 F' . 由垂线段最短可知, 当 $BF \perp AM$, 即点 F 位于点 F' 处时, BF 最小, 最后利用勾股定理即可求解.



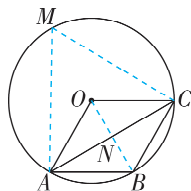
(第1题图)



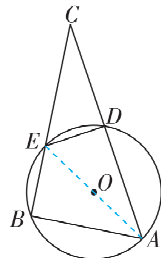
(第2题图)

2. 20 【解析】连结 OD , 如图. $\because OC \perp AB$, $\therefore \angle COE = 90^\circ$. $\because \angle AEC = 65^\circ$, $\therefore \angle OCE = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$. $\because OC = OD$, $\therefore \angle ODC = \angle OCE = 25^\circ$, $\therefore \angle DOC = 180^\circ - 25^\circ - 25^\circ = 130^\circ$, $\therefore \angle BOD = \angle DOC - \angle COE = 40^\circ$, $\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD = 20^\circ$, 故答案为 20.

3. 2 【解析】如图, 连结 OB , 交 AC 于点 N , 作圆周角 $\angle AMC$, 则 $\angle AOC = 2 \angle AMC$. \because 四边形 $OABC$ 是平行四边形, $\therefore \angle ABC = \angle AOC = 2 \angle AMC$. \because 四边形 $MABC$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, $\therefore \angle AMC + \angle ABC = 180^\circ$, $\therefore \angle AMC + 2 \angle AMC = 180^\circ$, $\therefore \angle AMC = 60^\circ$, $\therefore \angle AOC = 120^\circ$. \because 四边形 $OABC$ 是平行四边形, $\therefore AN = CN = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$. 又 $\because OA = OC$, $\therefore ON \perp AC$, $\angle OAC = \angle OCA = 30^\circ$, $\therefore OA = 2ON$, $\therefore (2ON)^2 = ON^2 + (\sqrt{3})^2$, 解得 $ON = 1$ (负值已舍去), $\therefore OA = 2ON = 2$, 即 $\odot O$ 的半径为 2.



4. $24\sqrt{3}$ 【解析】如图, 连结 AE . $\because \angle CBA = 90^\circ$, $\therefore AE$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore AE = 8$. $\because BE = DE$, $\therefore \widehat{BE} = \widehat{DE}$, $\therefore \angle BAE = \angle DAE$. $\because \angle BAC = 60^\circ$, $\therefore \angle BAE = \angle DAE = 30^\circ$, $\therefore BE = DE = \frac{1}{2} AE = 4$, $\therefore AB = \sqrt{AE^2 - BE^2} = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$. $\because AE$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle EDA = 90^\circ$. $\because \angle C = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, $\therefore EC = 2ED = 8$, $\therefore BC = BE + CE = 12$, $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{3} \times 12 = 24\sqrt{3}$. 故答案为 $24\sqrt{3}$.



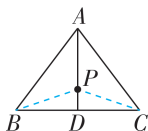
27.2 与圆有关的位置关系

1. 点与圆的位置关系

刷基础

1. C 【解析】如图, 连结 PB, PC . $\because AB = AC = 10 \text{ cm}, BC = 12 \text{ cm}, AD \perp BC$ 于点 D , $\therefore BD = CD = \frac{1}{2} BC = 6 \text{ cm}$, $\therefore AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 8 \text{ cm}$,

$\therefore PA=AD-DP=8-2=6$ (cm). 在 $\text{Rt} \triangle PBD$ 中, $BD=6$ cm, $PD=2$ cm, $\therefore PB=\sqrt{BD^2+PD^2}=2\sqrt{10}$ cm. 同理可得 $PC=2\sqrt{10}$ cm. $\therefore PB=PC=2\sqrt{10}$ cm > 6 cm, $PD=2$ cm < 6 cm, $AP=6$ cm, \therefore 点 A 在 $\odot P$ 上, 点 B, C 在 $\odot P$ 外, 点 D 在 $\odot P$ 内. 故选 C.



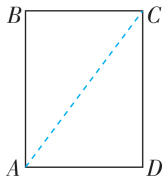
思路分析

连结 AC . 利用勾股定理得出 AC 的长, 要使得点 D 在圆内, 则 $r > 6$; 点 C 在圆外, 则 $r < 10$.

易错警示

切忌想当然地认为该点在圆外, 导致漏解. 当点与圆的位置关系不明确时, 需要分情况讨论.

2. $6 < r < 10$ 【解析】如图, 连结 AC . \therefore 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=8=CD$, $AD=6$, $\therefore AC=10$. \therefore 以 A 为圆心, r 为半径作 $\odot A$, 使得点 D 在圆内, 点 C 在圆外, \therefore 半径 r 的取值范围是 $6 < r < 10$, 故答案为 $6 < r < 10$.

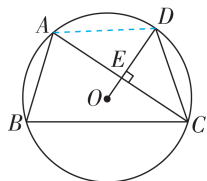


3. C 【解析】经过点 $P, A, B; P, A, C; P, B, C$ 可分别画出一个圆, 最多可画出圆的个数为 3, 故选 C.

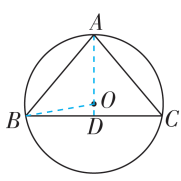
4. 4 【解析】 $\because A(1, 0), B(0, 2)$, \therefore 设直线 AB 的表达式为 $y=kx+2$. 把 $A(1, 0)$ 代入 $y=kx+2$, 得 $k=-2$, $\therefore y=-2x+2$. 当 $x=-1$ 时, $y=-2 \times (-1)+2=4$. \therefore 不在同一条直线上的三个点确定一个圆, \therefore 当 $m \neq 4$ 时, 平面直角坐标系中的三个点 $A(1, 0), B(0, 2), C(-1, m)$ 能确定一个圆, 故答案为 4.

5. D 【解析】由题图可知, $\triangle ABC$ 是锐角三角形, $\therefore \triangle ABC$ 的外心只能在其内部, 由此排除 A 选项和 B 选项. \therefore 每个小正方形的边长为 1, 由勾股定理得 $BP=CP=\sqrt{2} \neq PA$, \therefore 排除 C 选项, 故选 D.

6. B 【解析】如图, 连结 AD , 则 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 108^\circ$. $\therefore OD \perp AC$, $\therefore \widehat{AD} = \widehat{CD}$, $\therefore AD = CD$, $\therefore \angle EDC = \angle EDA = \frac{1}{2} \angle ADC = 54^\circ$, 故选 B.



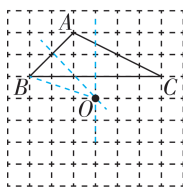
(第 6 题图)



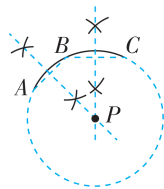
(第 7 题图)

7. $\frac{25}{8}$ 【解析】如图, 连结 OB , 作 $AD \perp BC$, 垂足为 D , 则易知 O 在 AD 上, $\therefore BD=CD=\frac{1}{2}BC=3$, $\therefore AD=\sqrt{5^2-3^2}=4$. 设 $OA=r$. 在 $\text{Rt} \triangle OBD$ 中, $OB^2=OD^2+BD^2$, 即 $r^2=(4-r)^2+3^2$, 解得 $r=\frac{25}{8}$. 故答案为 $\frac{25}{8}$.

8. 【解】(1) 如图(1)所示, 点 O 即为所求. 连结 BO , 则外接圆半径长为 $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$. 故答案为 $\sqrt{10}$.



图(1)



图(2)

(2) 如图(2)所示, $\odot P$ 即为所求.

刷易错

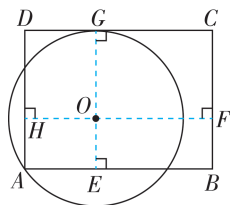
9. 7.5 cm 或 1.5 cm 【解析】分两种情况进行讨论: ①当点在圆内时, 点到圆上点的最小距离为 6 cm, 最大距离为 9 cm, 则该圆的直径是 15 cm, 半径是 7.5 cm; ②当点在圆外时, 点到圆上点的最小距离为 6 cm, 最大距离为 9 cm, 则该圆的直径是 3 cm, 半径是 1.5 cm. 故答案为 7.5 cm 或 1.5 cm.

2. 直线与圆的位置关系

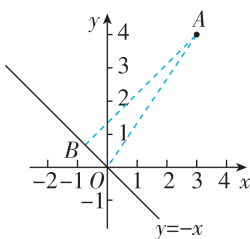
刷基础

1. B 【解析】 \because 餐盘的半径大于餐盘的圆心到筷子的距离, \therefore 可看成直线和圆相交. 故选 B.

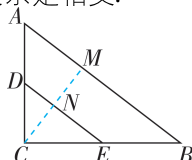
2. C 【解析】如图, 过点 O 作 $OE \perp AB$ 于 E , 作 $OF \perp BC$ 于 F , 作 $OG \perp CD$ 于 G , 作 $OH \perp AD$ 于 H . 由图可知, AB, AD 与 $\odot O$ 相交, BC 与 $\odot O$ 相离, CD 与 $\odot O$ 相切. $\therefore \odot O$ 的半径为 6, $\therefore OE < 6, OF > 6, OH < 6, OG = 6$. \therefore 点 O 到矩形 $ABCD$ 某条边的距离为 8, 且 $8 > 6$, \therefore 这条边可以是 BC , 故选 C.



3. 相交 【解析】如图, 作 AB 垂直于直线 $y=-x$ 于点 B , 连结 AO . $\because A(3, 4)$, $\therefore AO=5$. \therefore 点 A 到直线 $y=-x$ 的距离为 AB 的长, $AB < AO=5$, \therefore 直线 $y=-x$ 与 $\odot A$ 的位置关系是相交.



4. 相交 【解析】如图, 过点 C 作 $CM \perp AB$ 于点 M , 交 DE 于点 N . $\because AC=6, BC=8, AB=10$, $\therefore AC^2+BC^2=AB^2$, $\therefore \angle ACB=90^\circ$. $\therefore \frac{1}{2} \times CM \times AB = \frac{1}{2} \times AC \times BC$, $\therefore CM=\frac{6 \times 8}{10}=4.8$. $\therefore D, E$ 分别是 AC, BC 的中点, $\therefore DE$ 是 $\triangle ABC$ 的中位线, $\therefore DE \parallel AB$, $DE=\frac{1}{2}AB=5$, $\therefore CN=MN=\frac{1}{2}CM$, $\therefore MN=2.4$. \therefore 以 DE 为直径的圆的半径为 2.5, $2.5 > 2.4$, \therefore 以 DE 为直径的圆与 AB 的位置关系是相交.



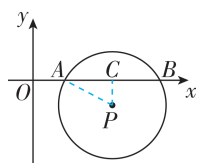
5. **D** 【解析】∵ 点 M 的坐标是 $(4, 3)$, ∴ 点 M 到 x 轴的距离是 3, 到 y 轴的距离是 4. ∴ 以 M 为圆心, r 为半径的圆与 x 轴相交, 与 y 轴相离, ∴ r 的取值范围是 $3 < r < 4$. 故选 D.

6. **3** 【解析】根据题意, 设 $P(x, y)$. ∵ 点 P 是抛物线 $y = x^2 - 4x + 3$ 上的一动点, 以 P 为圆心, 1 个单位长度为半径作 $\odot P$, 且 $\odot P$ 与 x 轴相切, ∴ 点 P 的纵坐标 $|y| = 1$, 即 $y = \pm 1$. 当 $y = 1$ 时, $x^2 - 4x + 3 = 1$, 解得 $x_1 = 2 + \sqrt{2}$, $x_2 = 2 - \sqrt{2}$, ∴ 点 P 的坐标为 $(2 + \sqrt{2}, 1)$ 或 $(2 - \sqrt{2}, 1)$; 当 $y = -1$ 时, $x^2 - 4x + 3 = -1$, 解得 $x_1 = x_2 = 2$, ∴ $P(2, -1)$. 综上所述, 点 P 的坐标为 $(2 + \sqrt{2}, 1)$ 或 $(2 - \sqrt{2}, 1)$ 或 $(2, -1)$, 即满足条件的圆共有 3 个. 故答案为 3.

7. 【解】作 $OD \perp BC$ 于点 D , 设当 $OD = 1 + t$ 时, $\odot O$ 与 BC 相切, 此时 $AO = \sqrt{3}t$, ∴ $OB = 10\sqrt{3} - \sqrt{3}t$. ∵ $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, ∴ $\angle B = 60^\circ$. ∵ $\angle ODB = 90^\circ$, ∴ $\sin B = \frac{OD}{OB} = \frac{1+t}{10\sqrt{3}-\sqrt{3}t} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 解得 $t = \frac{28}{5}$. ∴ 当 $t = \frac{28}{5}$ 时, 直线 BC 与 $\odot O$ 相切, 当 $0 \leq t < \frac{28}{5}$ 时, 直线 BC 与 $\odot O$ 相交, 当 $\frac{28}{5} < t \leq 10$ 时, 直线 BC 与 $\odot O$ 相离.

刷易错

8. **D** 【解析】如图, 连结 PA , 作 $PC \perp AB$ 于点 C , 则 $PC = 1$, 由垂径定理得 $AC = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$. 在 $\text{Rt}\triangle PAC$ 中, 由勾股定理得 $PA^2 = PC^2 + AC^2$, 即 $PA^2 = 1^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$, ∴ $PA = 2$ (负值已舍去), ∴ $\odot P$ 的半径是 2. 将 $\odot P$ 向上平移, 当 $\odot P$ 与 x 轴相切时, 平移的距离为 $1 + 2 = 3$ (个) 单位长度; 将 $\odot P$ 向下平移, 当 $\odot P$ 与 x 轴相切时, 平移的距离为 $2 - 1 = 1$ (个) 单位长度.



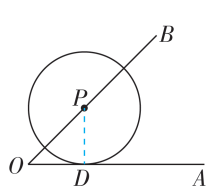
9. $r = 2\sqrt{2}$ 或 $r > 4$ 【解析】①当 $\odot P$ 与射线 OA 相切时, 如图(1), 过点 P 作 $PD \perp OA$ 于点 D , $\odot P$ 与射线 OA 只有一个公共点, 且 $r = PD$. ∵ $\angle AOB = 45^\circ$, $OP = 4$, ∴ $\text{Rt}\triangle OPD$ 中, $PD = OP \cdot \sin \angle AOB = 2\sqrt{2}$, ∴ 当 $\odot P$ 的半径 r 为 $2\sqrt{2}$ 时, $\odot P$ 与射线 OA 只有一个公共点. ②当 $\odot P$ 与射线 OA 相交且 $\odot P$ 与射线 OA 只有一个公共点时, 如图(2), 此时 $r > 4$. 综上所述, 当 $r = 2\sqrt{2}$ 或 $r > 4$ 时, $\odot P$ 与射线 OA 只有一个公共点.

易错警示

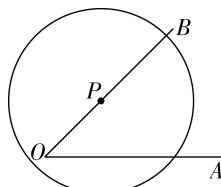
本题圆与直线相切有两种情况: ①圆心 P 在第四象限 (即将 $\odot P$ 向下平移); ②圆心 P 在第一象限 (即将 $\odot P$ 向上平移), 易忽略分类讨论, 只考虑其中的一种情况而漏解.

易错警示

圆与射线或线段只有一个公共点时, 要考虑两种情况: ①相切; ②圆与直线相交, 但与射线或线段只有一个公共点.



图(1)



图(2)

3. 切线

课时 1 切线的判定和性质定理

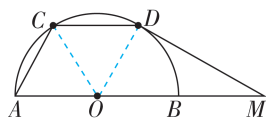


刷基础

1. **D** 【解析】

- ∵ $\angle O + \angle P + \angle OMP = 180^\circ$, 且 $\angle O + \angle P = 90^\circ$, ∴ $\angle OMP = 90^\circ$, 可知 PM 是 $\odot O$ 的切线, 故 A 选项不符合题意.
- ∵ $\angle O + \angle P + \angle OMP = 180^\circ$, 且 $\angle O + \angle P = \angle OMP$, ∴ $2\angle OMP = 180^\circ$, ∴ $\angle OMP = 90^\circ$, 可知 PM 是 $\odot O$ 的切线, 故 B 选项不符合题意.
- ∵ $OM^2 + PM^2 = OP^2$, ∴ $\triangle OMP$ 是直角三角形, 且 $\angle OMP = 90^\circ$, 可知 PM 是 $\odot O$ 的切线, 故 C 选项不符合题意.
- 点 N 是 OP 的中点不能得出 $\angle OMP = 90^\circ$, 即不能判定 PM 是 $\odot O$ 的切线, 故 D 选项符合题意.

2. **B** 【解析】连结 OD, OC , 如图. ∵ 点 C, D 将弧 AB 分成相等的三段弧, ∴ $\widehat{AC} = \widehat{DC} = \widehat{DB}$,



∴ $\angle AOC = \angle COD = \angle DOB = \frac{1}{3} \times 180^\circ = 60^\circ$. ∵ $\angle OMD = 30^\circ$, ∴ $\angle ODM = 90^\circ$. ∵ OD 是半径, ∴ MD 为半圆 O 的切线, 故 I 对. ∵ $OD = OC = OA$, $\angle AOC = \angle COD = 60^\circ$, ∴ $\triangle AOC, \triangle DOC$ 是等边三角形, ∴ $\angle ACO = \angle DCO = 60^\circ$, ∴ $\angle ACD = 120^\circ$, 故 II 错, 故选 B.

3. $\angle TAC = \angle B$ (答案不唯一) 【解析】∵ AB 是 $\odot O$ 的直径, ∴ $\angle ACB = 90^\circ$, ∴ $\angle B + \angle BAC = 90^\circ$. 当 $\angle TAC = \angle B$ 时, $\angle TAC + \angle BAC = 90^\circ$, 即 $\angle OAT = 90^\circ$, ∴ $OA \perp AT$. ∵ OA 是 $\odot O$ 的半径, ∴ 直线 AT 是 $\odot O$ 的切线, 故答案为 $\angle TAC = \angle B$ (答案不唯一).

4. (1) 【证明】∵ $AB = BC$, ∴ $\angle A = \angle C$. ∵ $OE = OC$, ∴ $\angle OEC = \angle C$, ∴ $\angle A = \angle OEC$, ∴ $OE \parallel AB$. ∵ $BA \perp GE$, ∴ $OE \perp EG$. 又∵ OE 为 $\odot O$ 的半径, ∴ EG 是 $\odot O$ 的切线.

(2) 【解】∵ $BF \perp GE$, ∴ $\angle BFG = 90^\circ$. ∴ $GF = 2\sqrt{3}$, $GB = 4$, ∴ $BF = \sqrt{BG^2 - GF^2} = 2$.

$\because BF \parallel OE, \therefore \triangle OEG \sim \triangle BFG, \therefore \frac{OE}{BF} = \frac{OG}{BG},$
 $\therefore \frac{OE}{2} = \frac{4+OE}{4}, \therefore OE=4$, 即 $\odot O$ 的半径长为 4.

5. **D** 【解析】 $\because AC$ 与 $\odot O$ 相切于点 A, AB 为直径, $\therefore AB \perp AC, \therefore \angle BAC = 90^\circ. \because \angle AOD = 80^\circ, \therefore \angle B = \frac{1}{2} \angle AOD = 40^\circ, \therefore \angle C = 90^\circ - \angle B = 50^\circ$. 故选 D.

6. $\sqrt{6}$ 【解析】如图, 连结 OB, OC . \because 圆心 O 到直线 l 的距离 $OA = \sqrt{3}, AB = 3,$
 $\therefore \tan \angle ABO = \frac{AO}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3},$
 $BO = \sqrt{AB^2 + AO^2} = 2\sqrt{3}, \therefore \angle ABO = 30^\circ. \because$ 将直线 l 绕点 B 逆时针旋转 15° 后得到直线 $m,$
 $\therefore \angle ABC = 15^\circ, \therefore \angle CBO = \angle CBA + \angle ABO = 45^\circ. \because$ 直线 m 恰好与 $\odot O$ 相切于点 $C, \therefore OC \perp BC, \therefore \angle COB = 45^\circ, \therefore CB = CO. \because$ 在 $\text{Rt} \triangle CBO$ 中, $CB^2 + CO^2 = BO^2, \therefore 2CO^2 = (2\sqrt{3})^2, \therefore CO = \sqrt{6}, \therefore \odot O$ 的半径为 $\sqrt{6}$. 故答案为 $\sqrt{6}$.

7. $2\sqrt{2}$ 【解析】 $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ECF = \angle ACB = 90^\circ. \because DF$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore OD \perp DF, \therefore \angle EDF = 90^\circ. \because OD \perp BC, \therefore \angle DEC = 90^\circ, \therefore$ 四边形 $CEDF$ 为矩形, $\therefore FD = EC$. 在 $\text{Rt} \triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ, AC = 2, AB = 6$, 则 $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 4\sqrt{2}. \because OD \perp BC, \therefore EC = \frac{1}{2}BC = 2\sqrt{2}, \therefore FD = 2\sqrt{2}$, 故答案为 $2\sqrt{2}$.

8. (1) 【证明】连结 OD , 如图.
 $\because AB$ 为 $\odot O$ 的切线, 切点为 $D, \therefore OD \perp AB, \therefore \angle ODA = \angle ODB = 90^\circ. \because \angle ACB = 90^\circ, \therefore \angle ABC + \angle COD = 180^\circ. \because \angle AOD + \angle COD = 180^\circ, \therefore \angle ABC = \angle AOD. \because OC = OD, \therefore \angle ACD = \angle ODC, \therefore \angle AOD = \angle ACD + \angle ODC = 2\angle ACD, \therefore \angle ABC = 2\angle ACD.$

(2) 【解】如图, $\because \odot O$ 的半径为 3, $AC = 8,$
 $\therefore OD = OC = 3, AO = AC - OC = 5, \therefore$ 在 $\text{Rt} \triangle AOD$ 中, $AD = \sqrt{AO^2 - OD^2} = 4. \because \angle OAD = \angle BAC, \angle ADO = \angle ACB, \therefore \triangle AOD \sim \triangle ABC, \therefore \frac{OD}{BC} = \frac{AD}{AC},$
 即 $\frac{3}{BC} = \frac{4}{8}, \therefore BC = 6.$

刷提升

1. **D** 【解析】如图, 连结 OB . $\because BD$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle OBD = 90^\circ. \because \odot O$ 的直径为 4, $\therefore OA = OB = 2. \because$ 四边形 $OACB$ 为菱形, $\therefore OA = OB = AB = 2, \therefore \triangle OAB$ 为等边三角形, $\therefore \angle AOB =$

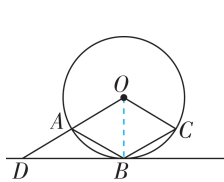
思路分析

根据圆周角的性质得到 $\angle ACB = 90^\circ$, 根据切线的性质得到 $OD \perp DF$, 再根据 $OD \perp CB$ 证明四边形 $CEDF$ 为矩形, 根据矩形的性质得到 $FD = EC$, 根据勾股定理求出 BC , 根据垂径定理解答即可.

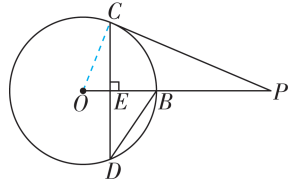
思路分析

若直线 l 与半圆只有一个交点, 则有两种情况: 直线 l 和半圆相切于点 C 或从直线 l 过点 A 开始到直线 l 过点 B 结束 (不包括直线 l 过点 A). 当直线 l 和半圆相切于点 C 时, 根据直线 l 的表达式知直线 l 与 x 轴所形成的锐角是 45° , 从而求得 $\angle DOC = 45^\circ$, 即可求出点 C 的坐标, 进一步求得 t 的值; 当直线 l 过点 A 或点 B 时, 直接根据待定系数法分别求得 t 的值.

$60^\circ, \therefore \angle ODB = 30^\circ, \therefore OD = 2OB = 4. \because BD^2 = OD^2 - OB^2, \therefore BD = \sqrt{OD^2 - OB^2} = 2\sqrt{3}$, 故选 D.



(第1题图)



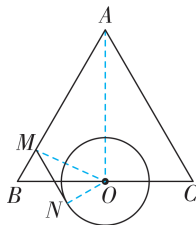
(第2题图)

2. **C** 【解析】如图, 连结 OC . $\because PC$ 切圆于 $C, \therefore OC \perp PC. \because$ 弦 $CD \perp OB, \therefore CE = DE.$

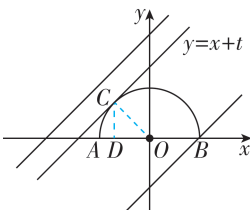
$\because \tan \angle BDC = \frac{BE}{DE} = \frac{2}{3}, \therefore$ 令 $BE = 2x, DE = 3x,$
 $\therefore OC = OB = \frac{5}{4} + 2x, CE = 3x. \because OC^2 = CE^2 + OE^2, \therefore \left(\frac{5}{4} + 2x\right)^2 = (3x)^2 + \left(\frac{5}{4}\right)^2, \therefore x = 1,$
 $\therefore CE = 3, OC = \frac{13}{4}. \because \angle OCE + \angle PCE = \angle P + \angle PCE, \therefore \angle P = \angle OCE, \therefore \sin P = \sin \angle OCE,$
 $\therefore \frac{CE}{PC} = \frac{OE}{OC}, \therefore \frac{3}{PC} = \frac{\frac{5}{4}}{\frac{13}{4}}, \therefore PC = \frac{39}{5}$. 故选 C.

3. **D** 【解析】如图, 连结 OA, OM, ON . \because 在边长为 4 的等边三角形 ABC 中, O 为线段 BC 的中点, $\therefore OB = \frac{1}{2}BC = 2, \therefore AO = \sqrt{AB^2 - OB^2} =$

$2\sqrt{3}. \because MN$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore ON \perp MN. \because$ 根据勾股定理知 $MN^2 = OM^2 - ON^2, ON$ 为定值, \therefore 当 OM 的值最小时, MN 的值最小, 当 OM 的值最大时, MN 的值最大, \therefore 当 $OM \perp AB$ 时, MN 的值最小, 当 M 与点 A 重合时, MN 的值最大. 当 $OM \perp AB$ 时, $\therefore S_{\triangle ABO} = \frac{1}{2}AO \cdot BO = \frac{1}{2}AB \cdot OM,$
 $\therefore OM = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \sqrt{3}, \therefore MN$ 的最小值为 $\sqrt{OM^2 - ON^2} = \sqrt{2}, MN$ 的最大值为 $\sqrt{OM^2 - ON^2} = \sqrt{11}, \therefore \sqrt{2} \leq MN \leq \sqrt{11}$, 选项 D 符合题意, 故选 D.

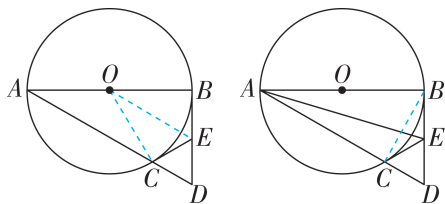


4. $t = \sqrt{2}$ 或 $-1 \leq t < 1$ 【解析】若直线 l 与半圆只有一个交点, 则有两种情况: 直线 l 和半圆相切于点 C 或从直线 l 过点 A 开始到直线 l 过点 B 结束 (不包括直线 l 过点 A), 如图, 连结 OC , 过 C 作 $CD \perp x$ 轴于 D . 易知直

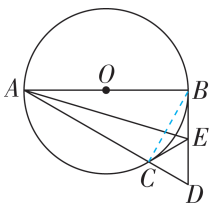


线 $y=x+t$ 与 x 轴所形成的锐角是 45° . 当直线 l 和半圆相切于点 C 时, $OC \perp$ 直线 l , $\therefore \angle COD=45^\circ$. 又 $\because OC=1, \therefore CD=OD=\frac{\sqrt{2}}{2}$, 即点 $C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. 把点 C 的坐标代入直线 $y=x+t$, 得 $t=\sqrt{2}$. 当直线 l 过点 A 时, 把点 $A(-1,0)$ 代入直线 $y=x+t$, 得 $t=1$; 当直线 l 过点 B 时, 把点 $B(1,0)$ 代入直线 $y=x+t$, 得 $t=-1$. 即当 $t=\sqrt{2}$ 或 $-1 \leq t < 1$ 时, 直线 l 和半圆只有一个交点. 故答案为 $t=\sqrt{2}$ 或 $-1 \leq t < 1$.

5. (1) 【证明】如图(1), 连结 OC, OE . $\because BD$ 与 $\odot O$ 相切, $\therefore \angle B=90^\circ$. \because 点 E 是 BD 的中点, $AO=OB, \therefore OE \parallel AD, \therefore \angle EOC=\angle OCA, \angle BOE=\angle A$. $\because OA=OC, \therefore \angle OCA=\angle A, \therefore \angle BOE=\angle EOC$. 又 $\because OB=OC, OE=OE, \therefore \triangle BOE \cong \triangle COE$ (S. A. S.), $\therefore \angle OCE=\angle B=90^\circ, \therefore OC \perp CE$. \because 点 C 是 $\odot O$ 上的点, $\therefore CE$ 与 $\odot O$ 相切.



图(1)



图(2)

(2) 【解】如图(2), 连结 BC . \because 点 E 是 BD 的中点, $DE=2, \therefore BD=2DE=4$. $\because AB$ 是直径, $\therefore \angle ACB=\angle ABD=90^\circ, \therefore \angle DAB+\angle ABC=\angle ABC+\angle CBD, \therefore \angle DAB=\angle CBD$. 又 $\because \angle D=\angle D, \therefore \triangle DAB \sim \triangle DBC, \therefore \frac{AD}{BD}=\frac{BD}{CD}, \therefore BD^2=AD \cdot CD$. $\because AC=4CD, \therefore CD=\frac{1}{5}AD, \therefore 4^2=\frac{1}{5}AD^2, \therefore AD^2=80$. 在 $\triangle ABD$ 中, $AB^2=AD^2-BD^2, \therefore AB^2=80-16=64, \therefore$ 在 $\triangle ABE$ 中, $AE=\sqrt{AB^2+BE^2}=\sqrt{64+4}=2\sqrt{17}$.

刷素养

6. 【解】(1) 如图(1), $\odot O$ 与 BC 相切, 则 $PQ \perp BC, \therefore \angle PQB=90^\circ$. $\because \angle ACB=90^\circ, AC=6 \text{ cm}, BC=8 \text{ cm}, \therefore AB=\sqrt{6^2+8^2}=10 \text{ (cm)}$. $\because \angle PQB=\angle ACB=90^\circ, \therefore PQ \parallel AC, \therefore \triangle BPQ \sim \triangle BAC, \therefore \frac{PB}{AB}=\frac{BQ}{BC}$. \because 点 P 在边 AB 上运动, 点 Q 在边 CB 上运动, $\therefore PB=5t \text{ cm}, CQ=4t \text{ cm}, \therefore \frac{5t}{10}=\frac{8-4t}{8}$, 解得 $t=1, \therefore t$ 的值为 1.

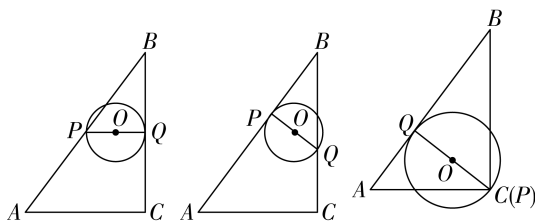
(2) 如图(2), 当点 P 在 AB 上, 点 Q 在 BC 上,

思路分析

(2) 分两种情况, 一是点 P 在 AB 上, 点 Q 在 BC 上, $\odot O$ 与 AB 相切, 则 $PQ \perp AB$, 先证明 $\triangle BQP \sim \triangle BAC$, 再求出 t 的值; 二是点 P 与点 C 重合, 点 Q 在 AB 上, $\odot O$ 与 AB 相切, 则 $CQ \perp AB$, 先证明 $\triangle BCQ \sim \triangle BAC$, 再求出 t 的值即可.

$\odot O$ 与 AB 相切时, $PQ \perp AB, \therefore \angle QPB=\angle ACB=90^\circ. \because \angle B=\angle B, \therefore \triangle BQP \sim \triangle BAC, \therefore \frac{QB}{AB}=\frac{BP}{BC}, \therefore \frac{8-4t}{10}=\frac{5t}{8}$, 解得 $t=\frac{32}{41}$. 如图(3), 当点 P 与点 C 重合, 点 Q 在 AB 上, $\odot O$ 与 AB 相切时, $CQ \perp AB$, 此时 $5t \geq 10+6$ 且 $8 < 4t < 10+8$, 即 $\frac{16}{5} \leq t < \frac{9}{2}$. $\because \angle CQB=\angle ACB=90^\circ, \angle B=\angle B, \therefore \triangle BCQ \sim \triangle BAC, \therefore \frac{BQ}{BC}=\frac{BC}{AB}, \therefore$ 点 Q 在 AB 上, $\therefore BQ=4t-8, \therefore \frac{4t-8}{8}=\frac{8}{10}$, 解得 $t=\frac{18}{5}$. $\therefore \frac{16}{5} \leq t < \frac{9}{2}, \therefore t=\frac{18}{5}$ 符合题意.

综上所述, t 的值为 $\frac{32}{41}$ 或 $\frac{18}{5}$.



图(1)

图(2)

图(3)

课时2 *切线长定理及三角形的内切圆



刷基础

关键点拨

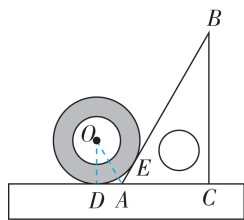
本题利用切线长定理求得 $PA=PB, BC=CE$ 和 $AD=ED$ 是解题的关键.

思路分析

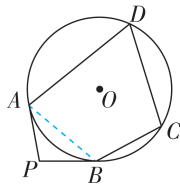
连结 AB , 根据切线长定理得到 $PA=PB$, 根据等腰三角形的性质得到 $\angle PAB=\angle PBA=\frac{1}{2}(180^\circ-102^\circ)=39^\circ$, 由圆内接四边形的性质得到 $\angle DAB+\angle C=180^\circ$, 于是得到结论.

1. C 【解析】 $\because PA, PB$ 分别切 $\odot O$ 于点 A, B, CD 切 $\odot O$ 于点 $E, \therefore PA=PB=4, BC=EC, AD=ED, \therefore PC+CD+PD=PC+CE+DE+PD=PC+BC+PD+AD=PB+PA=4+4=8$, 即 $\triangle PCD$ 的周长为 8, 故选 C.

2. D 【解析】 如图, 设圆形螺母的圆心为 O , 连结 OD, OA . 由题意得, AD, AB 分别为圆 O 的切线, $\therefore AO$ 为 $\angle DAB$ 的平分线, $OD \perp AC$. 又 $\because \angle CAB=60^\circ, \therefore \angle DAB=120^\circ, \therefore \angle OAD=\frac{1}{2}\angle DAB=60^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle AOD$ 中, $\angle OAD=60^\circ, AD=6 \text{ cm}, \therefore OD=6\sqrt{3} \text{ cm}, \therefore$ 圆形螺母的外直径为 $12\sqrt{3} \text{ cm}$.



3. 219° 【解析】 连结 AB , 如图. $\because PA, PB$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore PA=PB. \therefore \angle P=102^\circ, \therefore \angle PAB=\angle PBA=\frac{1}{2}(180^\circ-102^\circ)=39^\circ. \therefore \angle DAB+\angle C=180^\circ, \therefore \angle PAD+\angle C=\angle PAB+\angle DAB+\angle C=180^\circ+39^\circ=219^\circ$, 故答案为 219°.



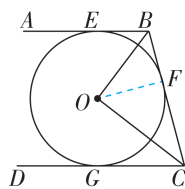
4. 6 【解析】 由题意易得 AB, CD 分别与半圆 O 相切于点 $B, C. \therefore AE$ 与半圆 O 相切于点 F ,

$\therefore AF=AB=4\text{ cm}, EF=EC$. 设 $EF=EC=x\text{ cm}$, 则 $DE=(4-x)\text{ cm}, AE=(4+x)\text{ cm}$. 在 $\text{Rt}\triangle ADE$ 中, 由勾股定理得 $(4-x)^2+4^2=(4+x)^2$, 解得 $x=1$, $\therefore CE=1\text{ cm}, \therefore DE=4-1=3(\text{ cm})$, $\therefore S_{\triangle ADE}=AD \cdot DE \div 2=3 \times 4 \div 2=6(\text{ cm}^2)$.

5. 【解】(1) 根据切线长定理得 $\angle OBF=\angle OBE$, $\angle OCF=\angle OCG$. $\because AB \parallel CD$, $\therefore \angle ABC+\angle BCD=180^\circ$, $\therefore \angle OBF+\angle OCF=90^\circ$, $\therefore \angle BOC=90^\circ$.

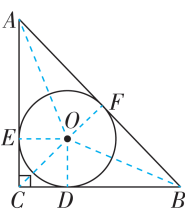
(2) 根据切线长定理得 $BE=BF, CF=CG$. 由 (1) 知 $\angle BOC=90^\circ$. $\therefore OB=5\text{ cm}, OC=12\text{ cm}$, \therefore 由勾股定理得 $BC=\sqrt{OB^2+OC^2}=13\text{ cm}$, $\therefore BE+CG=BF+CF=BC=13\text{ cm}$.

(3) 连结 OF , 如图. $\because BC$ 与 $\odot O$ 相切于点 F , $\therefore OF \perp BC$, $\therefore S_{\triangle OBC}=\frac{1}{2}OF \times BC=\frac{1}{2}OB \times OC$, 即 $\frac{1}{2}OF \times 13=\frac{1}{2} \times 5 \times 12$, $\therefore OF=\frac{60}{13}\text{ cm}$.



刷有所得
 $\text{Rt}\triangle ABC$ 的三边长分别为 c, a, b (其中 c 为斜边), 则 $\triangle ABC$ 的内切圆直径 d 可表示为 $d=a+b-c$, $c, d=\frac{2ab}{a+b+c}, d=\frac{\sqrt{2(c-a)(c-b)}}{2}$.

6. D 【解析】如图, 设 $\odot O$ 分别与 $\text{Rt}\triangle ABC$ 相切于点 D, E, F , 连结 OA, OB, OC, OD, OE, OF , 易证四边形 $OECD$ 是正方形. 设 $OE=OD=OF=r$, 则 $EC=CD=r$,



$\therefore AE=AF=b-r, BD=BF=a-r$. $\therefore AF+BF=AB$, $\therefore b-r+a-r=c$, $\therefore r=\frac{a+b-c}{2}$, $\therefore d=a+b-c$, 故选项 A 正确.

$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOB}$, $\therefore \frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$, $\therefore ab=r(a+b+c)$, $\therefore r=\frac{ab}{a+b+c}$, $\therefore d=\frac{2ab}{a+b+c}$, 故选项 B 正确.

$\therefore d=a+b-c$, $\therefore d^2=(a+b-c)^2=(a+b)^2-2c(a+b)+c^2=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$. $\therefore a^2+b^2=c^2$, $\therefore d^2=2c^2+2ab-2ac-2bc=2(c^2+ab-ac-bc)=2[c(c-a)+b(a-c)]=2(c-a)(c-b)$, $\therefore d=\sqrt{2(c-a)(c-b)}$, 故选项 C 正确. 无法得出选项 D. 故选 D.

7. 【解】(1) \because 点 O 为 $\triangle ABC$ 的外心, \therefore 由圆周角定理得 $\angle BOC=2\angle A$.

$\therefore \angle A=80^\circ$, $\therefore \angle BOC=160^\circ$.

(2) \because 点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, $\therefore \angle ABI=\angle IBC=\frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle ACI=\angle ICB=\frac{1}{2}\angle ACB$.

$\therefore \angle A=80^\circ$, $\therefore \angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A=$

关键点拨
 根据三角形内切圆的特点作出辅助线, 用两种不同的方法分别表示出 $\triangle ABC$ 的面积是解题的关键.

易错警示
 本题的易错点是混淆外心与内心, 三角形的内心是三角形三条角平分线的交点, 三角形的外心是三角形三条边的垂直平分线的交点.

100° , $\therefore \angle IBC+\angle ICB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=50^\circ$, $\therefore \angle BIC=180^\circ-(\angle IBC+\angle ICB)=130^\circ$.



刷提升

1. D 【解析】如图, 连结

OA, OB, OC . $\because PB$ 切 $\odot O$

于 B , PA 切 $\odot O$ 于 A ,

$\therefore OB \perp PB, OA \perp PA$. 又

$\therefore \angle P=50^\circ$, $\therefore \angle AOB=$

130° . $\because DB$ 切 $\odot O$ 于 B , DE 切 $\odot O$ 于 C ,

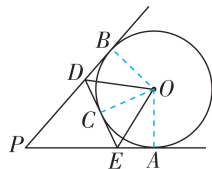
$\therefore DB=DC, OC \perp DC, OB \perp DB$, \therefore 易得 OD 平

分 $\angle BOC$, 即 $\angle DOC=\frac{1}{2}\angle BOC$. 同理得

$\angle EOC=\frac{1}{2}\angle AOC$, $\therefore \angle DOE=\angle DOC+$

$\angle EOC=\frac{1}{2}\angle BOC+\frac{1}{2}\angle AOC=\frac{1}{2}(\angle BOC+$

$\angle AOC)=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{1}{2} \times 130^\circ=65^\circ$. 故选 D.



2. B 【解析】如图, 当 $\odot O$ 与 AB, BC, CD 相切

时, 其面积最大, 设切点分别为 E, F, G . 连结

OA, OB, OC, OD, OE, OF ,

OG , 过点 D 作 $DH \perp BC$ 于点

H , 则 $OE \perp AB, OF \perp BC$,

$OG \perp CD$. $\because AD \parallel CB$,

$\angle BAD=90^\circ$, $\therefore \angle ABC=$

90° . $\therefore \angle DHB=90^\circ$, \therefore 四边形 $ABHD$ 是矩形,

$\therefore AB=DH=20\text{ cm}, AD=BH=9\text{ cm}$. $\because BC=$

24 cm , $\therefore CH=BC-BH=24-9=15(\text{ cm})$,

$\therefore CD=\sqrt{DH^2+CH^2}=\sqrt{20^2+15^2}=25(\text{ cm})$. 设

$OE=OF=OG=r\text{ cm}$, 则有 $\frac{1}{2} \times (9+24) \times 20=$

$\frac{1}{2} \times 20 \times r+\frac{1}{2} \times 24 \times r+\frac{1}{2} \times 25 \times r+\frac{1}{2} \times 9 \times (20-r)$,

$\therefore r=8$, 故选 B.



3. $\frac{3}{8}$ 【解析】如图所示, O 为 $\triangle ABC$ 中 $\angle ABC$,

$\angle ACB, \angle BAC$ 的平分线的交点, 设 $\odot O$ 分别

与 AB, AC, BC 相切于点 E, G, F , 连结 OA, OB ,

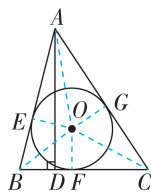
OC, OE, OG, OF , $\therefore OE \perp AB, OG \perp AC, OF \perp$

BC , $\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AOB}+S_{\triangle BOC}+S_{\triangle AOC}=\frac{1}{2}AB \cdot R+$

$\frac{1}{2}BC \cdot R+\frac{1}{2}AC \cdot R=\frac{1}{2}R(AB+$

$BC+AC)$. $\because AB+AC=\frac{5}{3}BC$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}R\left(\frac{5}{3}BC+BC\right)=$



$$\frac{1}{2}R \cdot \frac{8}{3}BC. \therefore AD \text{ 的长为 } h, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot h, \therefore \frac{1}{2}R \cdot \frac{8}{3}BC = \frac{1}{2}BC \cdot h, \therefore h = \frac{8}{3}R, \therefore \frac{R}{h} = \frac{3}{8}, \therefore \frac{R}{\frac{8}{3}R} = \frac{3}{8}, \text{ 故答案为 } \frac{3}{8}.$$

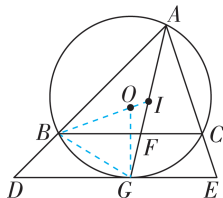
4. $\sqrt{23} \leq l \leq 4\sqrt{2}$ 【解析】设 EF 切 $\odot A$ 于点 G , 连结 AD, AN . $\because DM, DN$ 分别切 $\odot A$ 于点 $M, N, \therefore DM = DN, AN \perp DN$, 同理, $EM = EG, FN = FG, \therefore \triangle DEF$ 的周长 $l = DE + DF + EF = DE + ME + DF + FN = DM + DN = 2DN$. 在 $\text{Rt}\triangle AND$ 中, $DN = \sqrt{AD^2 - AN^2}$, AN 为定值, \therefore 当 AD 最大时, DN 最大. $\because \triangle ABC$ 为等边三角形, $\therefore AB = AC = 3, \therefore$ 当点 D 与点 B 或点 C 重合时, DN 取得最大值. 此时, $DN_{\text{最大}} = \sqrt{AD^2 - AN^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}, \therefore 2DN = 4\sqrt{2}$. 当 AD 最小时, DN 最小, \therefore 当点 D 是 BC 的中点时, DN 取得最小值. 此时, $BD = CD = \frac{3}{2}$. 在 $\text{Rt}\triangle ABD$ 中, $AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \therefore DN = \sqrt{AD^2 - AN^2} = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{23}}{2}, \therefore 2DN = \sqrt{23}, \therefore \sqrt{23} \leq l \leq 4\sqrt{2}$.

思路分析

由切线长定理得 $\triangle DEF$ 的周长 $l = DE + DF + EF = 2DN$. 连结 AD, AN , 在 $\text{Rt}\triangle AND$ 中, 利用勾股定理得出 $DN = \sqrt{AD^2 - AN^2}$, 则点 D 与点 B 或点 C 重合时, DN 取得最大值; 点 D 是 BC 的中点时, DN 取得最小值.

5. (1) 【证明】如图, 连结 OG . $\because \angle BAC$ 的平分线 AF 交 $\odot O$ 于点 $G, \therefore \angle BAG = \angle CAG, \therefore \widehat{BG} = \widehat{CG}, \therefore OG \perp BC$. $\because DE \parallel BC, \therefore OG \perp DE$. 又 $\because OG$ 是 $\odot O$ 的半径, $\therefore DE$ 为 $\odot O$ 的切线.

- (2) 【解】如图, 连结 BI, BG . \because 点 I 为 $\triangle ABC$ 的内心, $\therefore BI$ 平分 $\angle ABC, AG$ 平分 $\angle BAC, \therefore \angle BAI = \angle CAI, \angle ABI = \angle CBI. \therefore \angle BIG = \angle BAI + \angle ABI, \angle GBI = \angle GBC + \angle CBI, \angle GBC = \angle GAC, \therefore \angle BAI = \angle CBG, \therefore \angle BIG = \angle GBI, \therefore BG = IG$.



- $\therefore BC \parallel DE, \therefore \triangle AFC \sim \triangle AGE, \therefore \frac{AF}{AG} = \frac{CF}{GE} = \frac{2}{3}$. $\because AG = 6, \therefore AF = 4, \therefore FG = 2. \therefore \angle BGF = \angle AGB, \angle GBF = \angle BAG, \therefore \triangle BGF \sim \triangle AGB, \therefore \frac{BG}{FG} = \frac{AG}{BG}, \therefore \frac{BG}{2} = \frac{6}{BG}, \therefore BG = 2\sqrt{3}$ (负值已舍去), $\therefore GI$ 的长为 $2\sqrt{3}$.

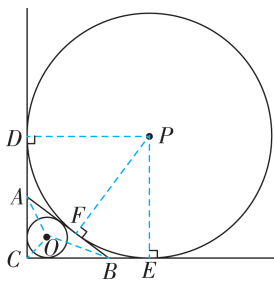
刷素养

6. 【解】(1) $\because \alpha = 90^\circ, b = 6, a = 8, \therefore c = \sqrt{a^2 + b^2} = 10$. 由题意得, $\odot P$ 分别与 CA 的延长线、 CB 的延长线以及直线 AB 相切, 设切点分别为 D, E, F , 连结 PD, PE, PF, OA, OB, OC , 如

思路分析

(1) 如图(1), 设点 D, E, F 分别是 3 个切点, 连结 PD, PE, PF, OA, OB, OC , 由等面积法可求得 m 的值, 再由正方形的性质及切线长定理可得 n 的值.

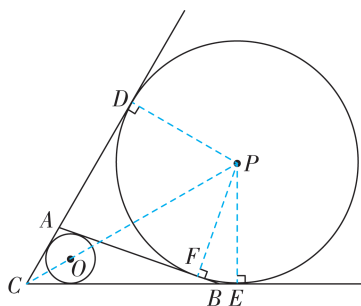
图(1). $\because \odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆, \therefore 易得 $S_{\triangle BCA} = S_{\triangle ABO} + S_{\triangle ACO} + S_{\triangle BCO}, \therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} \times 10m + \frac{1}{2} \times 6m + \frac{1}{2} \times 8m, \therefore m = 2$. 由题易得, 四边形 $DPEC$ 为正方形, $\therefore n = PD = \frac{1}{2}(CD + CE)$. 由切线长定理可知, $AF = AD, BF = BE, \therefore n = \frac{1}{2}(CD + CE) = \frac{1}{2}(AD + AC + BE + BC) = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{1}{2} \times (10 + 6 + 8) = 12$. 故答案为 2, 12.



图(1)

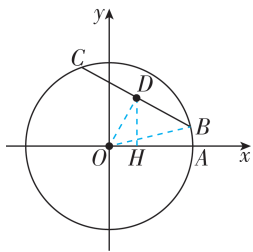
(2) 同(1)可知 $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(am + bm + cm), \therefore m = \frac{ab}{a+b+c}$. 由(1)可得 $n = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{a+b+c}{2}, \therefore a+b+c = 2n, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot m + \frac{1}{2}BC \cdot m + \frac{1}{2}AB \cdot m = \frac{m}{2}(AB + AC + BC) = \frac{m}{2}(a+b+c) = mn$. 故答案为 $\frac{ab}{a+b+c}, \frac{a+b+c}{2}, mn$.

(3) 如图(2), 连结 CP , 设 $\odot P$ 与 CA 延长线、 CB 延长线、 AB 的切点分别为 D, E, F , 连结 PD, PE, PF . 由切线长定理得 $AD = AF, BE = BF, CD = CE, \therefore CD = CE = \frac{1}{2}(CD + CE) = \frac{1}{2}(AD + AC + BE + BC) = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) = \frac{1}{2}(a+b+c)$. $\because PD \perp CD, PE \perp BC, PD = PE, \therefore CP$ 平分 $\angle ACB, \therefore \angle PCE = 30^\circ, \therefore PC = 2PE = 2n, \therefore$ 由勾股定理得 $CE = \sqrt{3}n, \therefore n = \frac{CE}{\sqrt{3}} = \frac{a+b+c}{2\sqrt{3}}, \therefore a+b+c = 2\sqrt{3}n$. 同(2)得 $m = \frac{ab}{a+b+c}, \therefore S_{\triangle ABC} = \frac{m}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}m \cdot 2\sqrt{3}n = \sqrt{3}mn$.



图(2)

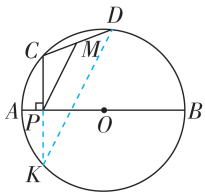
1. $4\sqrt{3}$ 【解析】如图,过点 D 作 $DH \perp x$ 轴于点 H ,连结 OD, OB , 则有 $OH=2, DH=3, \therefore$ 根据勾股定理得 $OD = \sqrt{OH^2+DH^2} = \sqrt{13}$. $\because A(5,0), \therefore OA=5, \therefore OB=OA=5. \therefore$ 过圆内定点 D 的所有弦中,与 OD 垂直的弦最短, \therefore 由垂径定理及勾股定理可得 BC 的长的最小值为 $2BD = 2\sqrt{OB^2-OD^2} = 2 \times \sqrt{25-13} = 4\sqrt{3}$, 故答案为 $4\sqrt{3}$.



思路分析

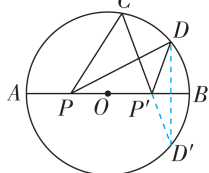
延长 CP 交 $\odot O$ 于点 K , 连结 DK , 根据垂径定理可得 $CP=PK$, 再根据三角形中位线定理可得 $PM = \frac{1}{2}KD$, 进而可得当 KD 的值最大时, PM 的值最大, 即当 KD 为直径时, PM 的值最大, 即可求解.

2. 4 【解析】如图, 延长 CP 交 $\odot O$ 于点 K , 连结 $DK. \because AB \perp CP, \therefore CP = PK. \because M$ 是 CD 的中点, $\therefore PM$ 是 $\triangle CKD$ 的中位线, $\therefore PM = \frac{1}{2}KD, \therefore$ 当 KD 的值最大时, PM 的值最大, 即当 KD 为直径时, PM 的值最大. $\because \odot O$ 的直径 $AB=8, \therefore PM$ 的最大值为 $\frac{1}{2}KD = \frac{1}{2}AB = 4$, 故答案为 4.

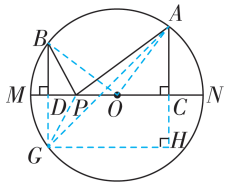


大招解读 | 利用将军饮马模型求最值

已知 C, D 是 $\odot O$ 上两点, P 为直径 AB 上一动点, 求 $PC+PD$ 的最小值. 如图, 作点 D 关于 AB 的对称点 D' , 连结 CD' 交 AB 于点 P' , 则 $P'D = P'D'$, 故当点 P 与点 P' 重合时, $PC+PD$ 取得最小值, 最小值为 CD' 的长.



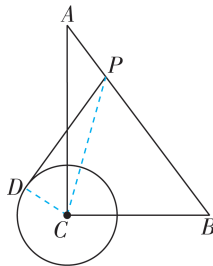
3. B 【解析】如图, 连结 $OA, OB. \because AC \perp MN, BD \perp MN, \therefore OB^2 = BD^2 + OD^2 = 36 + OD^2, OA^2 = AC^2 + OC^2 = 64 + OC^2. \because MN = 20, A, B$ 是 $\odot O$ 上的两点, $\therefore OA = OB = \frac{1}{2}MN = 10, \therefore 100 = 36 + OD^2, 100 = 64 + OC^2, \therefore OD = 8, OC = 6, \therefore CD = OD + OC = 14$. 延长 BD 与 $\odot O$ 相交于点 G , 连结 $GP, AG. \because MN$ 为 $\odot O$ 的直径, $BD \perp MN, \therefore BD = GD = 6, \therefore BP = GP, \therefore PA + PB = PA + GP, \therefore$ 当点 P 在线段 AG 上时, $PA + PB$ 取最小值, 最小值为 AG 的长. 过 G 作 $GH \perp AC$ 交 AC 的延长线于点 H . 又 $\because AC \perp MN, BD \perp MN, \therefore$ 四边形 $CDGH$ 是矩形, $\therefore GH = CD = 14, CH = DG = 6, \therefore AH = AC + CH = 14, \therefore AG = \sqrt{AH^2 + GH^2} = \sqrt{14^2 + 14^2} = 14\sqrt{2}, \therefore PA + PB$ 的最小值是 $14\sqrt{2}$, 故选 B.



大招解读 | 利用圆外点到圆心的距离求最值

- (1) 已知直线及圆上一动点求最值, 想到过圆心作直线的垂线.
(2) 已知圆外一定点及圆上一动点求最值, 想到连结定点与圆心.

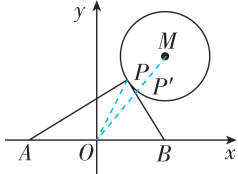
4. $\frac{\sqrt{119}}{5}$ 【解析】连结 DC, PC , 如图. $\because PD$ 为 $\odot C$ 的一条切线, $\therefore PD \perp DC, \therefore PD = \sqrt{PC^2 - DC^2}. \because DC$ 为半径, $\therefore DC$ 的长是定值 1, \therefore 当 PC 的长最小时, PD 的长取得最小值. 由垂线段最短可知, 当 $PC \perp AB$ 时, PC 的长最小. $\because \angle ACB = 90^\circ, AC = 4, BC = 3, \therefore AB = 5$. 当 $PC \perp AB$ 时, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC = \frac{1}{2}PC \cdot AB, \therefore 5PC = 12$, 解得 $PC = \frac{12}{5}, \therefore PD = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 - 1^2} = \frac{\sqrt{119}}{5}$, 故答案为 $\frac{\sqrt{119}}{5}$.



思路分析

连结 OP , 连结 OM , 交 $\odot M$ 于点 P' . 根据点 M 的坐标, 利用勾股定理求出 OM 的长, 再根据直角三角形斜边中线的性质, 以及关于原点对称的点的坐标特点知 $AB = 2OP$, 得到当线段 PO 最短时, 线段 AB 最短是解题关键.

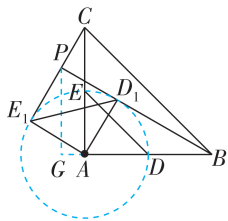
5. $(-3, 0)$ 【解析】如图, 连结 OP , 连结 OM , 交 $\odot M$ 于点 P' . \because 点 M 的坐标为 $(3, 4), \therefore OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5. \because PA \perp PB, \therefore \angle APB = 90^\circ. \because AO = BO, \therefore AB = 2PO, \therefore$ 当 PO 取得最小值, 即点 P 位于 P' 位置时, AB 取得最小值. $\because OM = 5, MP' = 2, \therefore OP' = 3, \therefore OA = 3, \therefore$ 点 A 的坐标为 $(-3, 0)$, 故答案为 $(-3, 0)$.



大招解读 | 利用直线与圆的特殊位置关系求最值

已知动点与定直线求最值, 动点的轨迹是圆, 想到利用直线与圆的位置关系, 通常在相切时取得最值.

6. $1 + \sqrt{3}$ 【解析】由题意知 D_1, E_1 在以 A 为圆心, AD 为半径的圆上, 如图. 当 BD_1 所在直线与 $\odot A$ 相切时, 直线 BD_1 与 CE_1 的交点 P 到直线 AB 的距离最大, 过点 P 作 $PG \perp AB$ 交 BA 延长线于 G , 此时易证四边形 AD_1PE_1 是正方形, $\therefore PD_1 = AD_1 = \frac{1}{2}AB = 2$, 则 $BD_1 = \sqrt{AB^2 - AD_1^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$. 在 $Rt\triangle ABD_1$ 中, 易证 $\angle ABP = 30^\circ, PB = 2 + 2\sqrt{3}$, 故点 P 到 AB 所在直线的距离的最大



值为 $PG = \frac{1}{2}PB = 1 + \sqrt{3}$, 故答案为 $1 + \sqrt{3}$.

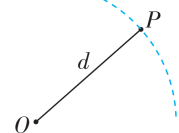
7. 10 $2\sqrt{5}$ 【解析】由题意可得 $\triangle CDP$ 的面积等于矩形 $ABCD$ 面积的一半, $\therefore \triangle CDP$ 的面积为 $\frac{1}{2}AB \times AD = \frac{1}{2} \times 5 \times 4 = 10$. 在 $\text{Rt}\triangle APD$ 中,

$PD = \sqrt{AD^2 + AP^2} = \sqrt{16 + AP^2}$, \therefore 当 AP 取最大值时, DP 有最大值. 由题意可得点 N 在以 D 为圆心, 4 为半径的圆弧上运动, 当射线 CN 与圆 D 相切时, AP 的值最大, 此时 P, M 两点重合, C, N, M 三点共线, 如图. 由题意可得 $AD = ND = 4$, $\angle DNC = \angle B = \angle DCB = 90^\circ$, $\therefore \angle NDC + \angle DCN = 90^\circ$, $\angle DCN + \angle MCB = 90^\circ$, $\therefore \angle NDC = \angle MCB$. $\because AD = BC$, $\therefore DN = BC$, $\therefore \triangle NDC \cong \triangle BCM$, $\therefore CN = BM = \sqrt{CD^2 - DN^2} = 3$, $\therefore AP = AB - BP = 2$, \therefore 在 $\text{Rt}\triangle APD$ 中, $PD = \sqrt{AD^2 + AP^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$, 故答案为 $10, 2\sqrt{5}$.

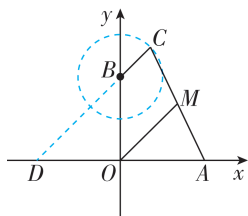
大招解读 | 利用定点定长构造辅助圆求最值

已知定点和定长, 想到动点的轨迹是以定点为圆心、定长为半径的圆.

如图, 动点 P 到定点 O 的距离为定值 d , 则点 P 的轨迹为以点 O 为圆心、 d 为半径的圆.



8. C 【解析】如图. \because 点 C 为坐标平面内一动点, $BC = 2$, $\therefore C$ 在以 B 为圆心, 2 为半径的圆上运动. 取 $OD = OA = 4$, 连结 BD . $\because AM = CM$, $OD = OA$, $\therefore OM$ 是 $\triangle ACD$ 的中位线, $\therefore OM = \frac{1}{2}CD$, \therefore 当 CD 的值最大时, OM 的值最大. 当 D, B, C 三点共线, 且 C 在 DB 的延长线上时, CD 的值最大, 故此时 OM 的值最大. $\because OB = OD = 4$, $\angle BOD = 90^\circ$, $\therefore BD = 4\sqrt{2}$, $\therefore CD = 4\sqrt{2} + 2$, $\therefore OM = \frac{1}{2}CD = 2\sqrt{2} + 1$, 即 OM 的最大值为 $2\sqrt{2} + 1$. 故选 C.



9. $16 - 4\sqrt{2}$ 【解析】如图, 连结 OQ, AM, AC . 由题意得 $OA = OQ = AP = 4$, $PM = MQ$, $\therefore AM$ 是 $\triangle POQ$ 的中位线, $\therefore AM = \frac{1}{2}OQ = 2$. $\because AB$ 为 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ACB = 90^\circ$. 由题意知, 点 M

思路分析

取 AB 的中点 O , 由 $\angle DBC = \angle BAD$ 及 $\angle ABC = 90^\circ$, 得出 $\angle ADB = 90^\circ$, 可得 D 点在以 O 为圆心, OA 为半径的圆弧上运动, 连结 OC 交 $\odot O$ 于点 D' , 当 D, D' 重合时, C, D 间的距离最小.

关键点拨

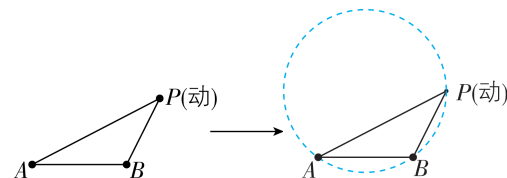
根据题意可知, 点 C 在半径为 2 的 $\odot B$ 上运动, 通过画图可知, C 在 DB 的延长线上时, OM 的值最大, 即可求解.

在以 A 为圆心, 2 为半径的 $\odot A$ 上运动. 当 M 点为线段 AC 与 $\odot A$ 的交点时, 点 M 到 BC 的距离最短, 为

$$AC - 2 = \sqrt{4^2 + 4^2} - 2 = 4\sqrt{2} - 2.$$

$\therefore BC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, $\therefore \triangle BCM$ 面积的最小值为 $\frac{1}{2}BC \cdot CM = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times (4\sqrt{2} - 2) = 16 - 4\sqrt{2}$. 故答案为 $16 - 4\sqrt{2}$.

大招解读 | 利用定弦定角构造辅助圆求最值



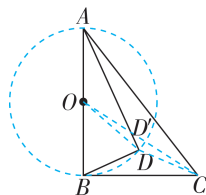
如图, 固定线段 AB 所对动角 $\angle P$ 的度数为定值, 则点 P 运动轨迹为过 A, B, P 三点的圆.

原理: 弦 AB 所对的同侧圆周角恒相等. 备注: 点 P 在优弧、劣弧上运动皆可.

10. C 【解析】 $\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 90^\circ$, $BC = 3$, $AC = 5$, \therefore 由勾股定理, 得 $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$.

如图, 取 AB 的中点 O .

$\because \angle DBC = \angle BAD$, $\angle DBC + \angle ABD = 90^\circ$, $\therefore \angle BAD + \angle ABD = 90^\circ$, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$, $\therefore D$ 点在以 O 为圆心, OA 为半径的圆弧上运动, 如图, 连结 OC 交 $\odot O$ 于点 D' , 连结 OD, DC . 当点 D 与点 D' 重合时, C, D 间的距离最小, 为 CD' 的长, 此时 $OD' = OB = \frac{1}{2}AB = 2$. 在 $\text{Rt}\triangle OCB$ 中, 由勾股定理, 得 $OC = \sqrt{BC^2 + OB^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, 故 CD 的最小值为 $OC - OD' = \sqrt{13} - 2$, 故选 C.

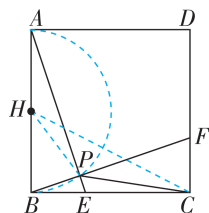


11. A 【解析】如图, 取 AB 中点 H , 连结 HP, HC . 在正方形 $ABCD$ 中, $AB = BC$, $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$. 在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 中,

$$\begin{cases} AB = BC, \\ \angle ABE = \angle BCF, \\ BE = CF, \end{cases}$$

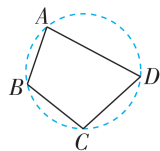
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle BCF$

(S. A. S.), $\therefore \angle BAE = \angle CBF$, $\therefore \angle BAE + \angle ABP = \angle CBF + \angle ABP = 90^\circ$, $\therefore \angle APB = 90^\circ$, $\therefore HP = \frac{1}{2}AB = 2$, \therefore 点 P 在以点 H 为圆心, 以 HP 为半径的半圆上运动, \therefore 当 H, P, C



三点在同一条直线上时, CP 取最小值. 在 $\text{Rt}\triangle BCH$ 中, $HC = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, $\therefore CP$ 的最小值为 $HC - HP = 2\sqrt{5} - 2$, 故选 A.

大招解读 | 利用四点共圆求最值

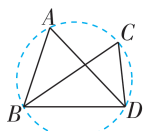


对角互补型:

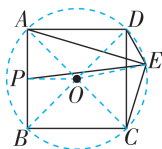
如图, 若 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ 或 $\angle B + \angle D = 180^\circ$, 则 A, B, C, D 四点共圆.

同侧等角型:

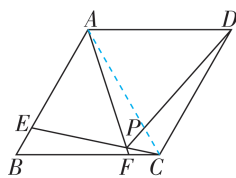
如图, 若 $\angle A = \angle C$, 则 A, B, C, D 四点共圆.



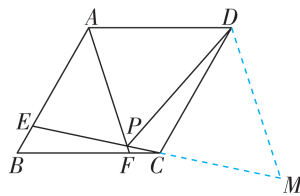
12. **D** 【解析】如图, 连结 AC, BD 交于点 O , 连结 PO, EO . $\because \angle AED = 45^\circ, \angle ACD = 45^\circ$, $\therefore A, C, E, D$ 四点共圆. \because 正方形 $ABCD$ 的边长为 6, $\therefore BD = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$, $\therefore OE = OD = \frac{1}{2}BD = 3\sqrt{2}$. $\because P$ 为 AB 的中点, O 是 BD 的中点, $\therefore OP$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线, $\therefore OP = \frac{1}{2}AD = 3$. $\therefore PE \leq OP + OE = 3 + 3\sqrt{2}$, \therefore 当 P, O, E 三点共线时, PE 的值最大, $PE = OP + OE = 3 + 3\sqrt{2}$, 即线段 PE 的最大值为 $3 + 3\sqrt{2}$. 故选 D.



13. (1) 【证明】如图(1)所示, 连结 AC . \because 四边形 $ABCD$ 是菱形, $\therefore AB = BC, AD \parallel BC, AB \parallel CD$. $\because \angle BAD = 120^\circ$, $\therefore \angle B = \angle ADC = 60^\circ$, $\therefore \triangle ABC$ 是等边三角形, $\therefore \angle ACF = \angle CBE = 60^\circ, AC = CB$. 又 $\because CF = BE$, $\therefore \triangle ACF \cong \triangle CBE$ (S. A. S.), $\therefore \angle CAF = \angle BCE$, $\therefore \angle APE = \angle ACE + \angle CAF = \angle BCE + \angle ACE = \angle ACB = 60^\circ$.



图(1)



图(2)

【解】(2) 如图(2), 延长 PC 到 M , 使得 $CM = AP$, 连结 DM . 由(1)易得 $\angle AFC = \angle CEB$. \because 菱形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, AB \parallel CD$, $\therefore \angle DAF + \angle AFC = 180^\circ, \angle DCM = \angle AEC$, $\therefore \angle CEB + \angle DAF = 180^\circ$. $\therefore \angle AEC + \angle CEB = 180^\circ$, $\therefore \angle DAF = \angle AEC = \angle DCM$. 又 $\because AP = CM, AD = CD$, $\therefore \triangle ADP \cong \triangle CDM$ (S. A. S.), $\therefore DP = DM, \angle ADP = \angle CDM$, $\therefore \angle ADC = \angle PDM$. $\because \angle ADC = 60^\circ$, $\therefore \angle PDM = 60^\circ$, $\therefore \triangle PDM$ 是等边三角形, $\therefore PD = PM = PC +$

思路分析

(3) 先证明 A, P, C, D 四点共圆, 则当 PD 为直径时, PD 的值最大, 设圆心为 O , 连结 AC, OA, OC , 过点 O 作 $OM \perp AC$ 于 M , 在 $\text{Rt}\triangle AOM$ 中求出 OA 的长即可得到答案.

$CM = PC + PA = 6$.

(3) $\because \angle APE = 60^\circ$,

$\therefore \angle APC = 120^\circ$.

$\therefore \angle ADC = 60^\circ$,

$\therefore \angle APC + \angle ADC =$

180° , $\therefore A, P, C, D$ 四

点共圆, \therefore 当 PD 为直

径时, PD 的值最大. 连结 AC , 设圆心为 O , 连

结 OA, OC , 过点 O 作 $OM \perp AC$ 于 M , 如图(3),

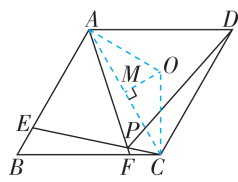
$\therefore \angle AOC = 2\angle ADC = 120^\circ$. $\because OA = OC$,

$\therefore \angle OAM = 30^\circ$, $\therefore OA = 2OM$. $\because AC = AB =$

$2\sqrt{3}, OM \perp AC$, $\therefore AM = \frac{1}{2}AC = \sqrt{3}$, $\therefore OM^2 +$

$AM^2 = (2OM)^2$, 解得 $OM = 1$, $\therefore OA = 2$, $\therefore PD$

的最大值为 4.



图(3)

大招解读 | 利用米勒定理求最值

已知点 A, B 是 $\angle MON$ 的边 ON

上的两个定点, 点 P 是边 OM

上的一个动点, 则当且仅当

$\triangle ABP$ 的外接圆与边 OM 相切

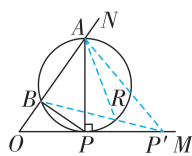
于点 P 时, $\angle APB$ 最大.

证明: 如图, 在边 OM 上任取一点 P' (不与 P 点重

合), 连结 AP', BP', BP' 与圆相交于点 R , 连结 AR ,

$\therefore \angle APB = \angle ARB > \angle AP'B$ (利用三角形外角性质),

\therefore 当圆与 OM 相切时, $\angle APB$ 最大.



14. **B** 【解析】过点 A, B 作 $\odot P$,

当 $\odot P$ 与 x 轴相切于点 C 时,

$\angle ACB$ 最大, 连结 $PA, PB,$

PC , 作 $PH \perp y$ 轴于 H , 如图.

\because 点 A, B 的坐标分别是 $(0,$

$1), (0, 3)$, $\therefore OA = 1, AB = 3 - 1 = 2$. $\because PH \perp$

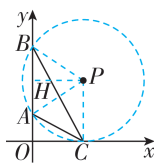
AB , $\therefore AH = BH = 1$, $\therefore OH = 2$. $\because \odot P$ 与 x 轴相

切于点 C , $\therefore PC \perp x$ 轴, \therefore 四边形 $PCOH$ 为矩

形, $\therefore PC = OH = 2, PH = OC$, $\therefore PA = 2$. 在

$\text{Rt}\triangle PAH$ 中, $PH = \sqrt{PA^2 - AH^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} =$

$\sqrt{3}$, $\therefore C$ 点坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$. 故选 B.



27.3 圆中的计算问题

课时1 弧长及扇形面积



刷基础

归纳总结

弧长公式: $l = \frac{n\pi R}{180}$, 其中, n 是表示 1° 的圆心角的倍数, n 和 180 都不带单位.

1. **C** 【解析】如图, 作圆周角

$\angle ADB$, 使 D 在优弧 AB 上.

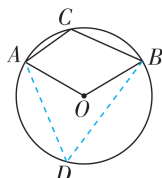
$\because A, D, B, C$ 四点共圆,

$\angle ACB = 120^\circ$, $\therefore \angle ACB +$

$\angle D = 180^\circ$, $\therefore \angle D = 60^\circ$,

$\therefore \angle AOB = 2\angle D = 120^\circ$, \therefore 劣弧 AB 的长度为

$\frac{120\pi \times 2}{180} = \frac{4\pi}{3}$. 故选 C.



2. **B** 【解析】因为点 O 为圆心, 且 $OC \perp AB$, 所

以点 D 为 AB 的中点, $\widehat{AC} = \widehat{BC}$, 所以 $AD =$

$\frac{1}{2}AB = 3\sqrt{3}$, $\angle AOC = \angle BOC$. 设 $\odot O$ 的半径为

$\frac{1}{2}AB = 3\sqrt{3}$, $\angle AOC = \angle BOC$. 设 $\odot O$ 的半径为

r . 在 $\text{Rt} \triangle ADO$ 中, 由勾股定理得 $AD^2 + DO^2 = AO^2$, 即 $(3\sqrt{3})^2 + (r-3)^2 = r^2$, 解得 $r = 6$. 因为 $\sin \angle AOD = \frac{AD}{AO} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $\angle AOD = 60^\circ$, 所以 $\angle AOB = 2\angle AOD = 120^\circ$, 所以 \widehat{AB} 的长为 $\frac{120 \times \pi \times 6}{180} = 4\pi$. 故选 B.

3. 90° 【解析】设旋转的角度是 n° . 根据题意得 $\frac{4n\pi}{180} = 2\pi$, 解得 $n = 90$.

4. $\frac{10\pi}{9}$ 【解析】连结 OD, OE . $\because AB = AC$, $\therefore \angle ABC = \angle C = 70^\circ$. $\because OE = OB$, $\therefore \angle OEB = \angle ABC = 70^\circ$, $\therefore \angle OEB = \angle C = 70^\circ$, $\therefore OE \parallel AC$. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A + \angle ABC + \angle C = 180^\circ$, $\therefore \angle A = 180^\circ - \angle ABC - \angle C = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$. $\therefore AB = 10$, $\therefore OA = OD = \frac{1}{2}AB = 5$. $\because OE \parallel AC$, $\therefore \angle A = \angle ADO = 40^\circ = \angle DOE$, $\therefore \widehat{DE}$ 的长为 $\frac{40\pi \times 5}{180} = \frac{10\pi}{9}$.

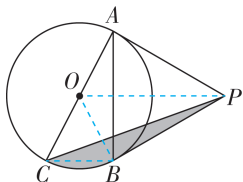
5. A 【解析】 $\because \angle A = 60^\circ$, $\therefore \angle BOC = 2\angle A = 120^\circ$, \therefore 阴影部分的面积为 $\frac{(360-120) \cdot \pi \times 3^2}{360} = 6\pi$, 故选 A.

6. 1 【解析】 \because 正方形的边长为 1, $\therefore \widehat{BD}$ 的长度为 2, $\therefore S_{\text{扇形}DAB} = \frac{1}{2}lr = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$.

7. $6\sqrt{3} - 2\pi$ 【解析】连结 OB . $\because AB$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle ABO = 90^\circ$. $\because \angle A = 30^\circ$, $\therefore OA = 2OB$, $\angle AOB = 60^\circ$. 在 $\text{Rt} \triangle OAB$ 中, $OB^2 + AB^2 = (2OB)^2$, 即 $OB^2 + 36 = 4OB^2$, 解得 $OB = 2\sqrt{3}$, $\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle AOB} - S_{\text{扇形}OBD} = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{3} - \frac{60\pi \times (2\sqrt{3})^2}{360} = 6\sqrt{3} - 2\pi$.

8. (1) 【证明】如图, 连结 OB, OP . $\because PA$ 与 $\odot O$ 相切于点 A , $\therefore OA \perp PA$, $\therefore \angle OAP = 90^\circ$.

在 $\triangle AOP$ 和 $\triangle BOP$ 中, $\begin{cases} PA = PB, \\ OP = OP, \\ OA = OB, \end{cases}$ $\therefore \triangle AOP \cong \triangle BOP$ (S. S. S.), $\therefore \angle OBP = \angle OAP = 90^\circ$, $\therefore OB \perp PB$. $\because OB$ 是 $\odot O$ 的半径, $\therefore PB$ 与 $\odot O$ 相切.



关键点拨

(2) 得到 $OP \parallel CB$, 可得出 $S_{\triangle OBC} = S_{\triangle PCB}$, 进而将阴影部分的面积转化为扇形 OCB 的面积是本题解题关键.

(2) 【解】如图, 连结 CB . 由 (1) 得 $\triangle AOP \cong \triangle BOP$, $\therefore \angle BPO = \angle APO$, $\angle BOP = \angle AOP$. $\therefore \angle APB = 60^\circ$, $\angle OBP = \angle OAP = 90^\circ$, $\therefore \angle AOB = 120^\circ$, $\therefore \angle COB = 60^\circ$, $\angle BOP = \angle AOP = 60^\circ$. 又 $\because OC = OB$, $\therefore \triangle OBC$ 是等边三角形, $\therefore \angle OBC = 60^\circ$, $\therefore OP \parallel CB$, $\therefore \triangle OCB$ 和 $\triangle PCB$ 等底等高, $\therefore S_{\triangle OBC} = S_{\triangle PCB}$, $\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}OCB}$. $\because PA = 4\sqrt{3}$, $\angle OAP = 90^\circ$, $\angle AOP = 60^\circ$, $\therefore OA = \frac{PA}{\sqrt{3}} = 4$, $\therefore OC = 4$, $\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形}OCB} = \frac{60 \times \pi \times 4^2}{360} = \frac{8}{3}\pi$.

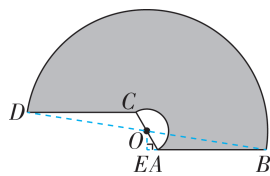


刷提升

思路分析

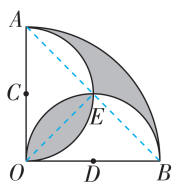
连结 BD , 过点 O 作 $OE \perp BA$ 交 BA 的延长线于点 E , 先通过解直角三角形求出大半圆 O 半径的平方, 再证明 $\triangle OAB \cong \triangle OCD$, 得出 $S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OCD}$, 进而可得 $S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{大半圆}O} - S_{\text{小半圆}O}$, 即可求解.

1. A 【解析】如图, 连结 BD , 过点 O 作 $OE \perp BA$ 交 BA 的延长线于点 E . 由旋转知, BD 经过点 O , 且 $OB = OD$. $\because \angle OAB = 120^\circ$, $\therefore \angle OAE = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, $\therefore AE = OA \cdot \cos 60^\circ = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $OE = OA \cdot \sin 60^\circ = 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore EB = EA + AB = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$, $\therefore OB^2 = OE^2 + EB^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 21$. 在 $\triangle OAB$ 和 $\triangle OCD$ 中, $\begin{cases} OA = OC, \\ \angle AOB = \angle COD, \\ OB = OD, \end{cases} \therefore \triangle OAB \cong \triangle OCD$ (S. A. S.), $\therefore S_{\triangle OAB} = S_{\triangle OCD}$, $\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{大半圆}O} - S_{\text{小半圆}O} = \frac{1}{2}\pi \cdot OB^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot OA^2 = \frac{1}{2}\pi \times 21 - \frac{1}{2}\pi \times 1 = 10\pi$ (dm²), 故选 A.

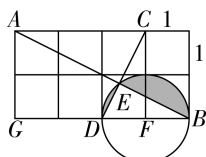


2. C 【解析】作点 D 关于 OB 的对称点 D' , 连结 $D'C$ 交 OB 于点 E' , 连结 $E'D, OD'$, 此时 $E'C + E'D$ 的值最小, 即 $E'C + E'D = CD'$. 由题意得 $\angle COD = \angle DOB = \angle BOD' = 30^\circ$, $OD' = OD = 2$, $\therefore \angle COD' = 90^\circ$, \widehat{CD} 的长为 $\frac{30\pi \times 2}{180} = \frac{\pi}{3}$, $\therefore CD' = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, \therefore 阴影部分周长的最小值为 $2\sqrt{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{6\sqrt{2} + \pi}{3}$. 故选 C.

3. $4\pi-8$ 【解析】如图,连结 AB 交半圆于点 E ,连结 OE ,则阴影部分的面积等于扇形 AOB 的面积减去三角形 AOB 的面积,即 $S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形}AOB} - S_{\triangle AOB} = \frac{90\pi \times 4^2}{360} - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 4\pi - 8$.



(第3题图)



(第4题图)

4. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{5}$ 【解析】如图, $\because \tan \angle BAG = \frac{BG}{AG} = \frac{4}{2} = 2$, $\tan \angle FDC = \frac{CF}{DF} = \frac{2}{1} = 2$, $\therefore \angle BAG = \angle FDC$. $\because \angle ABG = \angle EBD$, $\therefore \triangle ABG \sim \triangle DBE$, $\therefore \frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ABG}} = \left(\frac{BD}{AB}\right)^2$, $\angle BED = \angle AGB = 90^\circ$, $\therefore BD$ 是圆的直径. $\therefore S_{\triangle ABG} = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4$, $AB = \sqrt{AG^2 + BG^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$, $\therefore \frac{S_{\triangle BDE}}{4} = \left(\frac{2}{2\sqrt{5}}\right)^2$, $\therefore S_{\triangle BDE} = \frac{4}{5}$, $\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{半圆}} - S_{\triangle BDE} = \frac{1}{2} \pi \times 1^2 - \frac{4}{5} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{5}$. 故答案为 $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{5}$.

刷素养

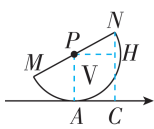
5. 【解】(1) \because 半圆 P 的直径 $MN=4$, \therefore 半圆 P 的半径为 2. $\because MN$ 平行于数轴,且半圆 P 与数轴相切于原点 O , \therefore 位置 I 中的 MN 与数轴之间的距离为 2. 位置 II 中的半圆 P 与数轴的位置关系是相切. 故答案为 2, 相切.

(2) 位置 I 中 \widehat{ON} 的长与数轴上线段 ON 的长相等. $\therefore \widehat{ON}$ 的长为 $\frac{90 \cdot \pi \cdot 2}{180} = \pi$, $NP=2$, \therefore 位置 III 中的圆心 P 在数轴上表示的数为 $\pi+2$.

(3) 由弧长公式可得,点 N 经过的路径长为 $\frac{90\pi \cdot 4}{180} = 2\pi$.

$\therefore S_{\text{半圆}} = \frac{180\pi \cdot 2^2}{360} = 2\pi$, $S_{\text{扇形}} = \frac{90\pi \cdot 4^2}{360} = 4\pi$, \therefore 半圆 P 扫过的图形的面积为 $2\pi+4\pi=6\pi$.

(4) 如图,作 NC 垂直数轴于点 C ,作 $PH \perp NC$ 于点 H ,连结 PA ,易得四边形 $PHCA$ 为矩形, $\therefore PA=HC$. 在 $\text{Rt} \triangle NPH$ 中, $PN=2$, $NH=$



$NC-HC=NC-PA=1$, $\therefore \sin \angle NPH = \frac{NH}{PN} = \frac{1}{2}$, $\therefore \angle NPH = 30^\circ$, $\therefore \angle MPA = 60^\circ$, \therefore 位置 V 中 \widehat{MA} 的长为 $\frac{60\pi \times 2}{180} = \frac{2\pi}{3}$, $\therefore OA$ 的长为 $\pi+4+$

思路分析

根据割补法,连结 AB 交半圆于点 E ,连结 OE ,则阴影部分的面积等于扇形 AOB 的面积减去三角形 AOB 的面积.

思路分析

根据弧长公式先计算出扇形的弧长,再利用圆锥的侧面展开图为一扇形,这个扇形的弧长等于圆锥底面的周长求解.

思路分析

根据圆锥底面圆周长可求得底面半径,由勾股定理求得母线长,进而可求得圆锥的全面积,根据弧长计算公式即可求出圆锥侧面展开图的圆心角度数.

$$\frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi + 4.$$

课时2 圆锥的侧面积和全面积



刷基础

1. A 【解析】由题意得这个生日帽的侧面积为

$$\frac{1}{2} \times 2 \times 9\pi \times 20 = 180\pi (\text{cm}^2), \text{ 故选 A.}$$

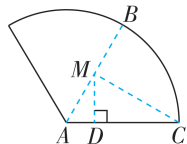
2. 2 【解析】设圆锥的母线长为 l cm, 则 $\frac{1}{2}l \cdot (2\pi \times 3) = 6\pi$, 解得 $l=2$, \therefore 圆锥的母线长为 2 cm.

3. C 【解析】扇形的弧长为 $\frac{90\pi \times 8}{180} = 4\pi$. 设圆锥的底面直径为 d , 则 $\pi d = 4\pi$, 所以 $d=4$. 故选 C.

4. C 【解析】设做成的圆锥体容器的底面半径为 r m, 则 $\frac{120\pi \cdot 1}{180} = 2\pi r$, 解得 $r = \frac{1}{3}$, \therefore 这个圆锥体容器的高为 $\sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ (m), 故选 C.

5. D 【解析】设圆锥侧面展开图的扇形圆心角度数为 n° .

$$\text{由题意得, } \frac{6\pi n}{180} = \pi \times 4, \therefore n =$$



120. 如图所示,在扇形 ABC 中, $AB=AC=6$, $\angle CAM = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ$. 过点 M 作 $MD \perp CA$ 于 D , $\therefore AD = \frac{1}{2}AM = \frac{1}{4}AB = \frac{3}{2}$, $\therefore DM = \sqrt{3}AD = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $DC = \frac{9}{2}$, $\therefore CM = \sqrt{DM^2 + DC^2} = 3\sqrt{3}$, \therefore 在

展开图中 M, C 之间的距离为 $3\sqrt{3}$, 故选 D.

6. C 【解析】由题意得,当圆与 EF, CD 都相切时,半径最大. 设 $AB=x$ cm, 则圆的直径为 $AD-AE = (12-x)$ cm. \because 扇形 ABF 和半径最大的圆,恰好能作为同一个圆锥的侧面和底面, $\therefore \frac{90x}{180}\pi = \pi(12-x)$, 解得 $x=8$, $\therefore AB$ 的长为 8 cm, 故选 C.

7. $24\pi \text{ cm}^2$ 216° 【解析】设圆锥的底面圆半径为 r cm, 母线长为 R cm, 侧面展开图的圆心角为 n° . \because 圆锥的底面圆周长为 6π , $\therefore 2\pi r = 6\pi$, $\therefore r=3$. \because 圆锥的高为 4 cm, $\therefore R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ (cm). 由圆锥的全面积 = 底面积 +

侧面积,可得圆锥的全面积为 $\pi \times 3^2 + \frac{1}{2} \times 6\pi \times 5 = 24\pi (\text{cm}^2)$. 由侧面展开图的弧长=底面圆的周长,可得 $\frac{n\pi R}{180} = 6\pi$, $\therefore n = \frac{180 \times 6\pi}{\pi \times 5} = 216$, 即圆锥的侧面展开图的圆心角是 216° .

8. 【解】(1) 设 $\angle ABC = n^\circ$. 根据题意, 得 $2\pi \times 1 = \frac{n \times \pi \times 4}{180}$, 解得 $n = 90$, 即 $\angle ABC = 90^\circ$.

(2) \because 一只蚂蚁从点 A 出发, 绕圆锥侧面爬一圈再回到 A 点, 而圆锥的侧面展开图中 A 点的对应点为 C , \therefore 这只蚂蚁爬过的最短距离为线段 AC 的长. 连结 AC . $\because \angle ABC = 90^\circ$, $BA = BC$, $\therefore AC = \sqrt{2}BA = 4\sqrt{2}$, \therefore 这只蚂蚁爬过的最短距离为 $4\sqrt{2}$.

刷易错

9. D 【解析】设圆锥的底面圆的半径为 r , 则 $2\pi r = 2\pi$, 解得 $r = 1$, 所以 $R = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$. 因为 $2\pi = \frac{n \times \pi \times 2}{180}$, 所以 $n = 180$. 故选 D.

大招专题5 不规则图形面积的求法

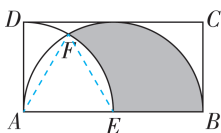
刷难关

大招解读 | 和差法

将不规则图形转化成若干个基本图形(有时需要添加辅助线), 然后将面积进行相加、相减求解.

1. D 【解析】根据题意知 $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1$, 则 $BE = BF = AD = AC = 1$. 设 $\angle B = n^\circ$, $\angle A = m^\circ$. $\because \angle ACB = 90^\circ$, $\therefore \angle B + \angle A = 90^\circ$, 即 $n + m = 90$, $\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ABC} - (S_{\text{扇形EBF}} + S_{\text{扇形DAC}}) = \frac{1}{2} \times 2 \times 1 - \left(\frac{n\pi \times 1^2}{360} + \frac{m\pi \times 1^2}{360} \right) = 1 - \frac{(n+m)\pi}{360} = 1 - \frac{\pi}{4}$, 故选 D.

2. $\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$ 【解析】如图, 连结 AF, EF . 由题意易知 $\triangle AEF$ 是等边三角形, $S_{\text{阴影}} = S_{\text{半圆}} - S_{\text{扇形AEF}} - S_{\text{弓形AF}} = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2 - \frac{60\pi \cdot 2^2}{360} - \left(\frac{60\pi \cdot 2^2}{360} - \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \right) = \sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$. 故答案为 $\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi$.



易错警示

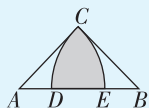
在进行圆锥侧面展开图的弧长的计算时, 易混淆圆锥底面圆半径和侧面展开图半径, 解题的关键是理解圆锥底面圆半径与侧面展开图半径的关系, 它们分别是圆锥的底面半径和母线.

关键点拨

全等的两个三角形的面积相等.

刷有所得

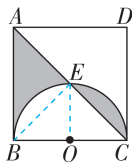
有的阴影部分面积是由两个基本图形相互重叠得到的, 如下图等腰 $\triangle ABC$ 中, $S_{\text{阴影}} = 2S_{\text{扇形ACE}} - S_{\triangle ABC}$.



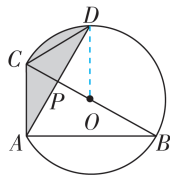
大招解读 | 等积转化法

适用情形: ①图中某些空白部分可通过对称、旋转等使之和部分阴影面积相等, 进而将阴影部分转化为规则图形; ②利用全等的三角形、同底等高的三角形面积相等转化.

3. A 【解析】如图, 设 AC 与半圆交于点 E , 半圆的圆心为 O , 连结 BE, OE . \because 四边形 $ABCD$ 是正方形, $\therefore \angle OCE = 45^\circ$. $\because OE = OC$, $\therefore \angle OEC = \angle OCE = 45^\circ$, $\therefore \angle EOC = 90^\circ$, $\therefore OE$ 垂直平分 BC , $\therefore BE = CE$, \therefore 弓形 BE 的面积 = 弓形 CE 的面积, $\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\triangle ABE} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle BCE} = \frac{1}{2} \times 6 \times 6 - \frac{1}{2} \times 6 \times 3 = 9$, 故选 A.



4. $\frac{2}{3}\pi$ 【解析】 \because Rt $\triangle ABC$ 内接于 \widehat{ABC} , $\angle BAC = 90^\circ$, $\therefore BC$ 是直径. 设 BC 的中点为 O , 如图, 连结 OD . $\because \angle BAC = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 2$, $\therefore BC = 2AC = 4$. $\therefore CD = CA = \frac{1}{2}BC$,

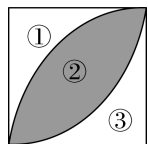


$\therefore CD = CO = DO = CA$, $\therefore \triangle COD$ 是等边三角形, $\therefore \angle COD = \angle CDO = 60^\circ$. P 是线段 BC 上的动点, 当点 A, P, D 共线时, $PA + PD$ 的值最小, 此时易得 $\angle CAD = \angle CDA = 30^\circ$, $\therefore \angle ADO = 30^\circ$. 在 $\triangle APC$ 和 $\triangle DPO$ 中, $\begin{cases} \angle CAP = \angle PDO, \\ \angle APC = \angle DPO, \\ AC = OD, \end{cases}$ $\therefore \triangle APC \cong \triangle DPO$ (A. A. S.), $\therefore S_{\text{阴影}} =$

$$S_{\text{扇形COD}} = \frac{60\pi \times 2^2}{360} = \frac{2}{3}\pi, \text{ 故答案为 } \frac{2}{3}\pi.$$

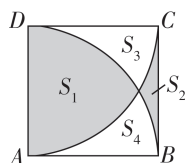
大招解读 | 容斥原理法

这类题阴影部分一般是由几个图形叠加而成, 求解时把所求阴影部分的面积问题转化为可求面积的规则图形的重叠部分的面积问题, 然后运用“容斥原理”解决. 如图, 求阴影部分的面积: $S_{\text{阴影}} = S_{\text{正方形}} - S_{\text{扇形}} = S_{\text{正方形}} - S_{\text{扇形}} = S_{\text{正方形}} - S_{\text{扇形}} = S_{\text{正方形}} - S_{\text{扇形}}$.



5. B 【解析】由题意可得 $S_{\text{阴影}} = 2S_{\text{扇形ABC}} - S_{\text{正方形ABCD}} = 2 \times \frac{90\pi \cdot a^2}{360} - a^2 = \frac{1}{2}\pi a^2 - a^2$, 故选 B.

6. A 【解析】如图, $S_{\text{正方形}} = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$, ①两个扇形的面积和为 $2S_{\text{扇形}} = 2S_1 + S_3 + S_4$, ② $② - ①$, 得 $S_1 - S_2 =$



$$2S_{\text{扇形}} - S_{\text{正方形}} = \frac{90\pi \times 1^2 \times 2}{360} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1. \text{ 故选 A.}$$

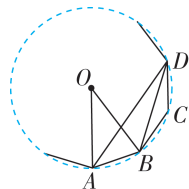
27.4 正多边形和圆

刷基础

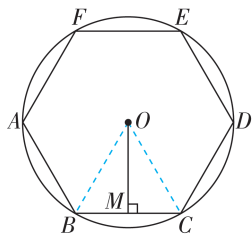
1. **B** 【解析】①错误,如矩形,满足条件,却不是正多边形;②正确;③错误,如圆内接矩形,满足条件,却不是正多边形;④正确. 共有 2 个正确.

2. **D** 【解析】由题意得这个正 n 边形的中心角为 60° , $\therefore n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$, \therefore 这个多边形是正六边形, 故选 D.

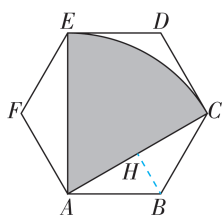
3. **A** 【解析】如图, 作正多边形的外接圆. $\because \angle ADB = 18^\circ$, $\therefore \angle AOB = 2\angle ADB = 36^\circ$, \therefore 这个正多边形的边数为 $\frac{360^\circ}{36^\circ} = 10$. 故选 A.



4. **D** 【解析】如图, 连结 OB, OC . 由题意可知 $OB = OC = 6$, $\angle BOC = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$. $\because OB = OC$, $OM \perp BC$, $\therefore \angle BOM = \frac{1}{2} \angle BOC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ$. $\therefore \angle OMB = 90^\circ$, $\therefore BM = \frac{1}{2} OB = \frac{1}{2} \times 6 = 3$, $\therefore OM = \sqrt{OB^2 - BM^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$, 故选 D.



(第 4 题图)



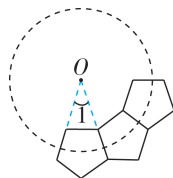
(第 5 题图)

5. **A** 【解析】 \because 正六边形 $ABCDEF$ 的边长为 2, $\therefore AB = BC = 2$, $\angle ABC = \angle BAF = \frac{(6-2) \times 180^\circ}{6} = 120^\circ$, $\therefore \angle BAC = \angle BCA$. $\because \angle ABC + \angle BAC + \angle BCA = 180^\circ$, $\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ABC) = \frac{1}{2} \times (180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$. 如图, 过 B 作 $BH \perp AC$ 于 H , 则 $AH = CH$, $BH = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 2 = 1$. 在 $\text{Rt} \triangle ABH$ 中, $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$, $\therefore AC = 2\sqrt{3}$. 同理可证, $\angle EAF = 30^\circ$, $\therefore \angle CAE = \angle BAF - \angle BAC - \angle EAF = 120^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $\therefore S_{\text{扇形} CAE} = \frac{60\pi \cdot (2\sqrt{3})^2}{360} = 2\pi$, \therefore 图中阴影部分的面积为 2π , 故选 A.

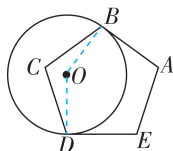
思路分析

先求出 $\angle E$, $\angle A$ 的度数, 再根据切线的性质可求出 $\angle OBA$, $\angle ODE$ 的度数, 从而可求出 $\angle BOD$ 的度数, 根据弧长的公式即可得到结论.

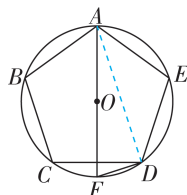
6. **D** 【解析】 \because 正五边形的内角和为 $(5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$, \therefore 正五边形的每一个内角为 $540^\circ \div 5 = 108^\circ$. 如图, 延长正五边形的两边相交于点 O , 点 O 即为圆环的圆心, 则 $\angle 1 = 360^\circ - 108^\circ \times 3 = 360^\circ - 324^\circ = 36^\circ$, $\therefore 360^\circ \div 36^\circ = 10$ (个). \because 已经有 3 个正五边形, $\therefore 10 - 3 = 7$ (个), 即完成这一圆环还需 7 个正五边形. 故选 D.



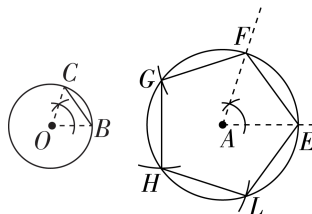
7. $\frac{8}{5}\pi$ 【解析】如图, 连结 OB, OD . \because 五边形 $ABCDE$ 是正五边形, $\therefore \angle E = \angle A = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ$. $\because AB, DE$ 分别与 $\odot O$ 相切, $\therefore \angle OBA = \angle ODE = 90^\circ$, $\therefore \angle BOD = (5-2) \times 180^\circ - 90^\circ - 108^\circ - 108^\circ - 90^\circ = 144^\circ$, \therefore 劣弧 BD 的长为 $\frac{144\pi \times 2}{180} = \frac{8}{5}\pi$, 故答案为 $\frac{8}{5}\pi$.



8. 18° 【解析】如图所示, 连结 AD . $\because AF$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ADF = 90^\circ$. \because 五边形 $ABCDE$ 是 $\odot O$ 的内接正五边形, $\therefore \angle ABC = \frac{180^\circ \times (5-2)}{5} = 108^\circ$. \therefore 四边形 $ABCD$ 是 $\odot O$ 的内接四边形, $\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$, $\therefore \angle ADC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$, $\therefore \angle CDF = \angle ADF - \angle ADC = 90^\circ - 72^\circ = 18^\circ$. 故答案为 18° .



9. 【解】如图, ①作 $\angle EAF = \angle BOC$. ②在 $\odot A$ 上截取 $\widehat{FG} = \widehat{GH} = \widehat{HL} = \widehat{EF}$, 顺次连结各点, 则五边形 $EFGHL$ 即为所求.

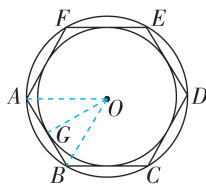


易错警示

一个正多边形的内切圆半径、外接圆半径与正多边形的边长的一半构成一个直角三角形. 常因未分清哪条线段是内切圆半径, 哪条线段是外接圆半径而造成计算错误.

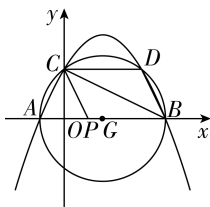
刷易错

10. $2\sqrt{3}$ 【解析】过点 O 作 $OG \perp AB$ 于 G , 连结 OA, OB , 如图所示, 则 OG 为正六边形内切圆的半径, 易得 $\triangle OAB$ 是等边三角形, $\therefore OA = AB = 4$, $\therefore AG = \frac{1}{2} AB = 2$, $\therefore OG = \sqrt{OA^2 - AG^2} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$.

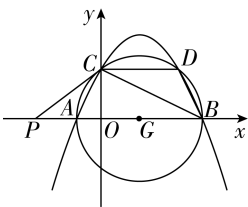


全章综合训练

$8 = -\frac{1}{8}(x-6)^2 + \frac{25}{2}$, \therefore 抛物线的对称轴为直线 $x=6$, $\therefore C$ 点与 D 点关于直线 $x=6$ 对称, $\therefore D(12,8)$, $\therefore CD=12$. 又 $\because B(16,0), C(0,8)$, $\therefore BD = \sqrt{(12-16)^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{16^2 + 8^2} = 8\sqrt{5}$. 当 P 点在 x 轴上时, $BP \parallel CD$, 点 P 在点 B 左侧, $\therefore \angle BCD = \angle CBP$. ①如图(1), 当 $\angle CPB = \angle CDB$ 时, $\triangle BCD \sim \triangle CBP$, $\therefore \angle DBC = \angle BCP$, $\therefore CP \parallel DB$, \therefore 四边形 $CDBP$ 是平行四边形, $\therefore CD=BP=12$, $\therefore OP=OB-BP=4$, $\therefore P(4,0)$;



图(1)

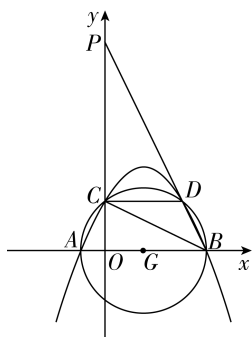


图(2)

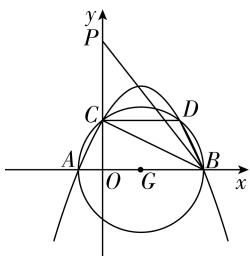
②如图(2), 当 $\angle CDB = \angle BCP$ 时, $\triangle BCD \sim \triangle PBC$, $\therefore \frac{CD}{BC} = \frac{BD}{PC} = \frac{BC}{PB}$, $\therefore \frac{12}{8\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{PB}$, 解得 $PB = \frac{80}{3}$, $\therefore OP = PB - OB = \frac{32}{3}$, $\therefore P(-\frac{32}{3}, 0)$.

当 P 点在 y 轴上时, $\therefore A, B, C, D$ 四点共圆, $\therefore \angle CAB + \angle CDB = 180^\circ$. 由题可知 $\angle AOC = 90^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$, $\therefore \angle CAO = \angle BCO$, $\therefore \angle OCB + \angle CDB = 180^\circ$, \therefore 点 P 在 y 轴正半轴上, $\angle PCB = \angle CDB$.

③如图(3), 当 P 点在 BD 的延长线上时, $\triangle BCD \sim \triangle BPC$, $\therefore \frac{BC}{BP} = \frac{CD}{CP} = \frac{BD}{BC}$, $\therefore \frac{12}{CP} = \frac{4\sqrt{5}}{8\sqrt{5}}$, 解得 $CP = 24$, $\therefore OP = OC + CP = 32$, $\therefore P(0, 32)$;



图(3)



图(4)

④如图(4), 当 $\angle DCB = \angle PBC$ 时, $\triangle BCD \sim \triangle PBC$, $\therefore \frac{BC}{PB} = \frac{CD}{PC} = \frac{BD}{BC}$, $\therefore \frac{12}{8\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{PC}$, $\therefore PC = \frac{40}{3}$, $\therefore OP = OC + CP = \frac{64}{3}$, $\therefore P(0, \frac{64}{3})$.

综上, P 点坐标为 $(4, 0)$ 或 $(-\frac{32}{3}, 0)$ 或 $(0, 32)$ 或 $(0, \frac{64}{3})$.

思路分析

(1) 连结 CG , 由题意可知 $\odot G$ 的圆心 G 的坐标为 $(6, 0)$, 半径为 10 , 则 $CG = 10$, 进而可求 $C(0, 8)$, 再将 $A(-4, 0), B(16, 0)$ 代入 $y = ax^2 + bx + 8$, 即可求函数的表达式.

(2) 分四种情况讨论: ①当 P 点在 x 轴上, $\angle CPB = \angle CDB$ 时; ②当 P 点在 x 轴上, $\angle CDB = \angle BCP$ 时; ③当 P 点在 y 轴上, 且在 BD 的延长线上时; ④当 P 点在 y 轴上, $\angle DCB = \angle PBC$ 时.

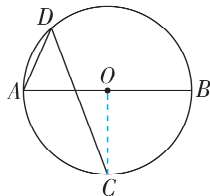
思路分析

根据垂径定理的推论可得 $CD \perp AB$. 设半径为 r m, 则 $OD = (2.5 - r)$ m. 在 $\text{Rt} \triangle ADO$ 中利用勾股定理列方程求解即可.

刷中考

1. B 【解析】如图, 连结 OC .

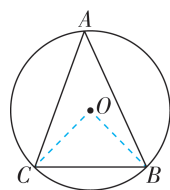
$\because \widehat{AC} = \widehat{BC}$, $\therefore \angle AOC = \angle BOC$. $\because AB$ 为直径, $\therefore \angle AOC + \angle BOC = 180^\circ$, $\therefore \angle AOC = 90^\circ$, $\therefore \angle D = \frac{1}{2} \angle AOC = 45^\circ$. 故选 B.



2. $\frac{\pi}{2}$ 【解析】如图, 连结 OB, OC , 则 $OB = OC$. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 65^\circ$, $\angle ACB = 70^\circ$, $\therefore \angle A = 180^\circ - 60^\circ - 75^\circ = 45^\circ$.

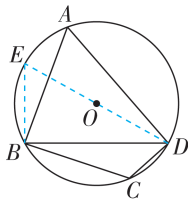
$\therefore \triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $\therefore \angle COB = 2\angle A = 90^\circ$, $\therefore \triangle OCB$ 为等腰直角三角形, $\therefore OC = OB = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 2$, $\therefore \widehat{BC}$ 的长为

$\frac{90\pi}{180} \times 2 = \pi$. 故答案为 π .

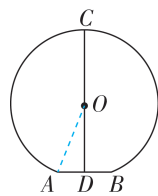


3. $6\sqrt{3}$ 【解析】如图, 作直径 DE , 连结 BE , 则 $\angle A = \angle E$,

$\angle EBD = 90^\circ$. \because 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $\therefore \angle A + \angle BCD = 180^\circ$. $\therefore \angle BCD = 120^\circ$, $\therefore \angle A = 60^\circ$, $\therefore \angle E = 60^\circ$. $\because \odot O$ 的半径为 6 , $\therefore DE = 12$, $\therefore BD = DE \times \sin E = 12 \times \sin 60^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$. 故答案为 $6\sqrt{3}$.



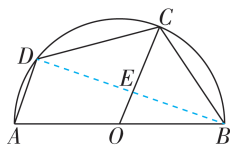
4. B 【解析】如图, 连结 OA . $\because D$ 为 AB 的中点, C 为拱门最高点, 线段 CD 经过拱门所在圆的圆心, $AB = 1$ m, $\therefore CD \perp AB$, $AD = BD = 0.5$ m. 设拱门所在圆的半径为 r m, $\therefore OA = OC = r$ m. $\because CD = 2.5$ m, $\therefore OD = (2.5 - r)$ m, $\therefore r^2 = 0.5^2 + (2.5 - r)^2$, 解得 $r = 1.3$, \therefore 拱门所在圆的半径为 1.3 m. 故选 B.



5. 55 【解析】 \because 直径 AB 平分弦 CD , $\therefore AB \perp CD$. $\because \widehat{BC} = \widehat{BC}$, $\therefore \angle A = \angle D = 35^\circ$, $\therefore \angle C = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$, 故答案为 55 .

6. (1) 【证明】 $\because \angle DAB + 2\angle ABC = 180^\circ$, $\angle AOC = 2\angle ABC$, $\therefore \angle DAB + \angle AOC = 180^\circ$, $\therefore AD \parallel OC$.

(2) 【解】如图, 连结 BD 交 OC 于点 E . 由题意知, $\angle ADB = 90^\circ$, O 是 AB 的中点. $\therefore OC \parallel AD$, $\therefore OC \perp BD$, 且 OE 是



$\triangle ABD$ 的中位线, $\therefore OE = \frac{1}{2}AD = 1$. 设半圆的半径为 r , 则 $CE = r - 1$. 由勾股定理知, $OB^2 - OE^2 = BE^2 = BC^2 - CE^2$, 即 $r^2 - 1^2 = (2\sqrt{3})^2 - (r - 1)^2$, 解得 $r_1 = 3, r_2 = -2$ (舍去), $\therefore AB = 2r = 6$.

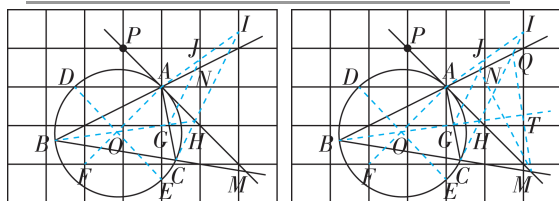
关键点拨

解决本题的关键是连结 BD , 运用直径所对的圆周角是直角和垂径定理进行推理计算.

7. C 【解析】连结 OA, OB , 如图所示. $\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle OAP = 90^\circ$. $\because \angle P = 30^\circ$, $\therefore \angle AOP = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. $\because AB \parallel PC$, $\therefore \angle OAB = \angle AOP = 60^\circ$. $\because OA = OB$, $\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形, $\therefore \angle AOB = 60^\circ$, $\therefore \angle BOC = 60^\circ$. $\because OC = OB$, $\therefore \triangle COB$ 是等边三角形, $\therefore \angle BCP = 60^\circ$. 故选 C.

8. (1) $\sqrt{2}$ 【解析】由勾股定理可知 $PA = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, 故答案为 $\sqrt{2}$.

(II) 如图(1), 直线 PA 与射线 BC 的交点为 M ; 取圆与网格线的交点 D 和 E , 连结 DE ; 取格点 F , 连结 AF , 与 DE 相交于点 O ; 连结 BO 并延长, 与 AC 相交于点 G , 与直线 PA 相交于点 H ; 连结 CH 并延长, 与网格线相交于点 I , 连结 AI , 与网格线相交于点 J ; 连结 GJ , 与线段 BA 的延长线相交于点 N , 则点 M, N 即为所求.

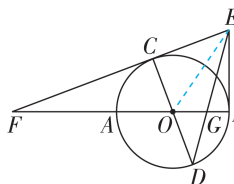


图(1)

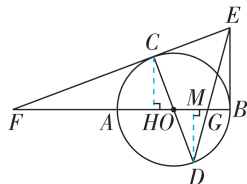
【解析】在图(1)基础上, 设 BA 的延长线与 CI 的交点为 Q , 如图(2). $\because \angle DAE = 90^\circ$, $\therefore DE$ 为圆的直径. $\because AF$ 为正方形的对角线, $\therefore \angle DAF = \angle EAF = 45^\circ$, $\therefore AF$ 垂直平分 DE , \therefore 点 O 为 $\triangle ABC$ 外接圆的圆心. 又 $\because AB = BC$, $\therefore BG \perp AC$, \therefore 点 G 为线段 AC 的中点, $\angle ABG = \angle CBG$. 由网格可知点 J 为线段 AI 的中点, $\therefore GJ$ 为 $\triangle ACI$ 的中位线, $\therefore GJ \parallel CI$, \therefore 点 N 为线段 AQ 的中点, $\therefore AQ = 2AN$. $\because AB = BC$, $BH = BH$, $\angle ABH = \angle CBH$, $\therefore \triangle ABH \cong \triangle CBH$ (S. A. S.), $\therefore AH = CH$, $\angle BAH = \angle BCH$, $\therefore \angle QAH = \angle MCH$. 又 $\because \angle AHQ = \angle CHM$, $\therefore \triangle AHQ \cong \triangle CHM$ (A. S. A.), $\therefore AQ = CM$, 即 $CM = 2AN$. 连结 MN, QM , 延长 BH 交 QM 于点 T . $\because AB = BC$, $AQ = CM$, $\therefore BQ = BM$. $\because \angle QBH = \angle MBH$, $\therefore BT \perp QM$. $\because AM$ 为 $\odot O$ 的切线, $\therefore \angle OAH = 90^\circ$, $\therefore \angle OAB + \angle QAM = 90^\circ$. $\because OA = OB$, $\therefore \angle OBA = \angle OAB$, 即 $\angle QAM + \angle OBA = 90^\circ$. $\therefore \angle OBA + \angle AQM = 90^\circ$, $\therefore \angle QAM = \angle AQM$, $\therefore AM = QM$, $\therefore MN \perp AQ$, \therefore 点 M, N 即为所求.

9. (1) 【证明】 如图(1), 连结 OE . $\because BE$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore OB \perp BE$, 即 $\angle OBE = 90^\circ$.

在 $\triangle OEC$ 和 $\triangle OEB$ 中, $\begin{cases} OC = OB, \\ OE = OE, \\ CE = BE, \end{cases}$
 $\therefore \triangle OEC \cong \triangle OEB$ (S. S. S.), $\therefore \angle OCE = \angle OBE = 90^\circ$, $\therefore OC \perp CE$.
 又 $\because OC$ 是 $\odot O$ 的半径, $\therefore EF$ 是 $\odot O$ 的切线.



图(1)



图(2)

(2) 【解】如图(2), 过点 C 作 $CH \perp BF$ 于 H , 过点 D 作 $DM \perp BF$ 于 M . 设 $OA = OC = r$, 则 $OF = OA + AF = r + 10$. 由(1)可得 $\angle OCF = 90^\circ$, \therefore 在 $\text{Rt} \triangle OCF$ 中, $\sin F = \frac{OC}{OF} = \frac{1}{3}$, $\therefore 3OC = OF$, $\therefore 3r = r + 10$, $\therefore r = 5$, $\therefore OA = OC = 5$, $\therefore AB = CD = 2OA = 10$, $OF = 15$, $\therefore BF = OF + OB = 20$. 在 $\text{Rt} \triangle OCF$ 中, 由勾股定理得 $CF = \sqrt{OF^2 - OC^2} = \sqrt{15^2 - 5^2} = 10\sqrt{2}$, $\therefore \cos F = \frac{CF}{OF} = \frac{10\sqrt{2}}{15} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

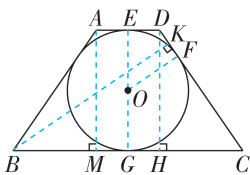
\therefore 在 $\text{Rt} \triangle BEF$ 中, $EF = \frac{BF}{\cos F} = \frac{20}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = 15\sqrt{2}$, $\therefore CE = EF - CF = 5\sqrt{2}$, $\therefore BE = 2\sqrt{2}$.

$5\sqrt{2}$. 在 $\text{Rt} \triangle CDE$ 中, 由勾股定理得 $DE = \sqrt{CE^2 + CD^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + 10^2} = 5\sqrt{6}$. $\because S_{\triangle OCF} = \frac{1}{2} CH \cdot OF = \frac{1}{2} OC \cdot CF$, $\therefore CH = \frac{OC \cdot CF}{OF} = \frac{5 \times 10\sqrt{2}}{15} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$. $\therefore \angle CHO = \angle DMO = 90^\circ$, $\angle COH = \angle DOM$, $OC = OD$, $\therefore \triangle DOM \cong \triangle COH$ (A. A. S.), $\therefore DM = CH = \frac{10\sqrt{2}}{3}$. $\therefore \angle DMG = \angle EBG = 90^\circ$, $\angle DGM = \angle EGB$, $\therefore \triangle DGM \sim \triangle EGB$, $\therefore \frac{EG}{DG} = \frac{BE}{DM}$, 即 $\frac{EG}{\frac{10\sqrt{2}}{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\frac{10\sqrt{2}}{3}}$, $\therefore EG = \frac{3}{2+3} DE = 3\sqrt{6}$.

10. 70° 【解析】 $\because PA, PB$ 是圆 O 的切线, AC 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore PA = PB, PA \perp AC$, $\therefore \angle PAC = 90^\circ$. $\because \angle BAC = 35^\circ$, $\therefore \angle PBA = \angle PAB = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$, $\therefore \angle P = 180^\circ - \angle PBA - \angle PAB = 180^\circ - 55^\circ - 55^\circ = 70^\circ$, 故答案为 70° .

11. $\frac{64}{5}$ 【解析】设 AD, CD, BC 分别与 $\odot O$ 相切于点 E, F, G , 连结 OE, OG, OF , 过点 D 作

$DH \perp BC$ 于点 H , 过点 B 作 $BK \perp CD$ 于点 K , 过点 A 作 $AM \perp BC$ 于点 M , 如图, $\therefore OE \perp AD, OF \perp CD, OG \perp BC, DE = DF, CF = CG, \therefore \angle OGC = \angle OED = \angle DHG = 90^\circ. \therefore$ 梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC, \therefore$ 点 E, O, G 共线, \therefore 四边形 $EGHD$ 为矩形, $\therefore EG = DH, DE = HG. \therefore \odot O$ 的面积为 $16\pi, \therefore \pi OE^2 = 16\pi, \therefore OE = 4, \therefore EG = 2OE = 8 = DH$. 设 $DE = DF = HG = x. \therefore CD = 10, \therefore CF = CG = 10 - x, \therefore CH = CG - HG = 10 - 2x. \therefore$ 在 $Rt\triangle DHC$ 中, $DH^2 + HC^2 = DC^2, \therefore 8^2 + (10 - 2x)^2 = 10^2$, 解得 $x = 2$ 或 $x = 8$ (舍去), $\therefore CH = 10 - 2 \times 2 = 6$, 同理可得 $AE = MG = 2, BM = 6, \therefore BC = BM + MG + GH + CH = 6 + 2 + 2 + 6 = 16. \therefore \angle C = \angle C, \angle BKC = \angle DHC = 90^\circ, \therefore \triangle BKC \sim \triangle DHC, \therefore \frac{BK}{DH} = \frac{BC}{DC}, \therefore \frac{BK}{8} = \frac{16}{10}, \therefore BK = \frac{64}{5}, \therefore$ 点 B 到 CD 的距离为 $\frac{64}{5}$, 故答案为 $\frac{64}{5}$.



思路分析

连结 OB, OF , 过点 A 作 $AM \perp OB$ 于点 M . 先根据正六边形的性质推出 $\triangle OGB \cong \triangle OHF$, 得出 $S_{\triangle OGB} = S_{\triangle OHF}$, 从而得出 $S_{\text{菱形} OBAF} = S_{\text{五边形} OGAFH}$, 然后根据 $\angle ABO = 60^\circ$, 求出 AM 的长, 从而得 $S_{\text{五边形} OGAFH} = 8\sqrt{3}$, 最后根据 $S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} OPQ} - S_{\text{五边形} OGAFH}$ 求出结果即可.

中, 易得 $\angle BOF = 120^\circ = \angle GOH, OB = OF = AB = AF = 4, \angle ABO = \angle EFO = 60^\circ, \therefore \angle BOG = \angle FOH$, 四边形 $OBAF$ 为菱形. 在 $\triangle OGB$ 与 $\triangle OHF$ 中, $\begin{cases} \angle GBO = \angle HFO, \\ OB = OF, \\ \angle GOB = \angle HOF, \end{cases} \therefore \triangle OGB \cong \triangle OHF (A.S.A.), \therefore S_{\triangle OGB} = S_{\triangle OHF}, \therefore S_{\text{菱形} OBAF} = S_{\text{五边形} OGAFH}. \therefore \angle ABO = 60^\circ, \therefore AM = AB \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}, \therefore S_{\text{菱形} OBAF} = S_{\text{五边形} OGAFH} = 2\sqrt{3} \times 4 = 8\sqrt{3}. \therefore S_{\text{扇形} OPQ} = \frac{120}{360} \pi \times 4^2 = \frac{16}{3} \pi, \therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} OPQ} - S_{\text{五边形} OGAFH} = \frac{16}{3} \pi - 8\sqrt{3}. \therefore$ 故答案为 $\frac{16}{3} \pi - 8\sqrt{3}$.

刷章测

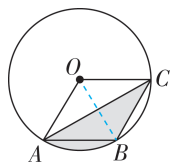
1. **A** 【解析】 $\therefore \angle AOD = 50^\circ, \therefore \angle ABD = \frac{1}{2} \angle AOD = 25^\circ. \therefore BA$ 平分 $\angle CBD, \therefore \angle ABC = \angle ABD = 25^\circ. \therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle C = 90^\circ, \therefore \angle A = 180^\circ - 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$. 故选 A.

2. **C** 【解析】 $\therefore \sin \theta$ 的值为 $\frac{5}{13}$, 圆锥的底面半径为 5 cm, \therefore 母线长为 13 cm. \therefore 底面周长为 $2\pi \times 5 = 10\pi$ (cm), \therefore 圆锥的侧面积为 $\frac{1}{2} \times 10\pi \times 13 = 65\pi$ (cm²), 故选 C.

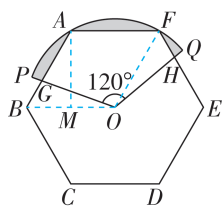
3. **A** 【解析】 \therefore 点 O 是 AC 的中点, \therefore 线段 BO 是 $\triangle ABC$ 的中线, $\therefore S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COB}, \therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{扇形} OBC}. \therefore \angle BAC = 30^\circ, \therefore \angle BOC = 2 \angle BAC = 60^\circ. \therefore AC = 12, \therefore OC = 6, \therefore S_{\text{阴影部分}} = \frac{60\pi \times 6^2}{360} = 6\pi$, 故选 A.

4. **C** 【解析】连结 $OD. \therefore \angle C = 90^\circ, AC = 3, BC = 6, \therefore AB = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}. \therefore AD$ 是 $\odot O$ 的切线, $\therefore OD \perp AD, \therefore \angle ADO = 90^\circ, \therefore \angle ADC + \angle ODB = 90^\circ. \therefore \angle CAD + \angle ADC = 90^\circ, \therefore \angle CAD = \angle ODB. \therefore OB = OD, \therefore \angle ODB = \angle B, \therefore \angle CAD = \angle B. \therefore \angle ACD = \angle BCA, \therefore \triangle CAD \sim \triangle CBA, \therefore AD : AB = AC : BC$, 即 $AD : 3\sqrt{5} = 3 : 6$, 解得 $AD = \frac{3\sqrt{5}}{2}$. 故选 C.

5. **C** 【解析】如图, 设 QP 的中点为 $F. \therefore \angle AOB = 90^\circ, \therefore PQ$ 为直径, \therefore 点 F 为圆心. 设 $\odot F$ 与 AB 的切点为 D , 连结 FD, OF, OD , 则 $FD \perp AB. \therefore A(12, 0), B(0, 9), \therefore AO = 12, BO = 9, \therefore AB = 15. \therefore \angle AOB = 90^\circ, FO + FD = PQ, FO + FD \geq OD$, 即 $PQ \geq OD$. 当 $OD \perp AB$ 时, OD 有最小值, 即 PQ 有最小值. 在 $Rt\triangle AOB$ 中,



(第 13 题图)



(第 14 题图)

思路分析

设 QP 的中点为 F , 由 $\angle AOB = 90^\circ$ 可知 QP 是直径, F 为圆心. 设 $\odot F$ 与 AB 的切点为 D , 连结 FD, OF, OD , 则有 $FD \perp AB$. 由题意易知, $FO + FD = PQ \geq OD$, 故当 $OD \perp AB$ 时, PQ 取得最小值, 最后利用等面积法求出 OD 的长即可.

13. $\frac{\pi}{6}$ 【解析】如图, 连结 OB , 则 $OA = OB = 1. \therefore$ 四边形 $OABC$ 为平行四边形, $OA = OC, \therefore OC \parallel AB$, 四边形 $OABC$ 为菱形, $\therefore OA = AB = OB, S_{\triangle AOB} = S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} S_{\text{菱形} OABC}, \therefore \triangle AOB$ 为等边三角形, $\therefore \angle AOB = 60^\circ, \therefore$ 阴影部分的面积为 $S_{\text{扇形} OAB} - S_{\triangle OBA} + S_{\triangle ABC} = S_{\text{扇形} OAB} = \frac{60\pi}{360} \times 1^2 = \frac{\pi}{6}$. 故答案为 $\frac{\pi}{6}$.

14. $\frac{16}{3} \pi - 8\sqrt{3}$ 【解析】如图, 连结 OB, OF , 过点 A 作 $AM \perp OB$ 于点 M . 在正六边形 $ABCDEF$

$$\frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}OD \cdot AB, \therefore OD = \frac{OA \cdot OB}{AB} = \frac{12 \times 9}{15} = 7.2, \text{即线段 } PQ \text{ 长度的最小值为 } 7.2.$$

6. 上 【解析】设以 AB 为直径的圆的圆心为 C .
 \because 点 $A(0,3)$, 点 $B(4,0)$, $\therefore AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$,
 点 $C(2,1.5)$, $\therefore OC = \sqrt{2^2 + 1.5^2} = 2.5 = \frac{1}{2}AB$,
 \therefore 点 $O(0,0)$ 在以 AB 为直径的圆上.

7. $\frac{15}{4}$ 【解析】连结 OD , 如图所
 示. $\because CD \perp AB$, $\therefore CE = DE = \frac{1}{2}CD = 3$. 设 $\odot O$ 的半径为 r , 则
 $OE = r - 1$, $OD = r$. 在 $\text{Rt} \triangle ODE$
 中, 由勾股定理得 $(r-1)^2 + 3^2 = r^2$, 解得 $r = 5$,
 $\therefore S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}AO \cdot DE = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = \frac{15}{2}$. $\because OF \perp$
 AD , $OA = OD$, $\therefore AF = DF$, $\therefore S_{\triangle AOF} = \frac{1}{2}S_{\triangle AOD} =$
 $\frac{1}{2} \times \frac{15}{2} = \frac{15}{4}$. 故答案为 $\frac{15}{4}$.

8. 48° 【解析】如图, 连结
 OE, OD, CE . \because 五边形
 $ABCDE$ 是正五边形,
 $\therefore \angle CDE = (5-2) \times 180^\circ \div 5 = 108^\circ$. $\therefore \angle CDF = 96^\circ$,
 $\therefore \angle FDE = \angle CDE - \angle CDF =$
 $108^\circ - 96^\circ = 12^\circ$, $\therefore \angle FCE = 12^\circ$. \because 正五边形
 $ABCDE$ 内接于 $\odot O$, $\therefore \angle EOD = 360^\circ \div 5 = 72^\circ$,
 $\therefore \angle ECD = \frac{1}{2}\angle EOD = 36^\circ$, $\therefore \angle FCD = \angle FCE +$
 $\angle ECD = 12^\circ + 36^\circ = 48^\circ$, 故答案为 48° .

9. 65 【解析】 $\because D$ 是 $\triangle ABC$ 的内心, $\therefore AD$ 平分
 $\angle BAC$, BD 平分 $\angle ABC$, $\therefore \angle BAD = \angle CAD$,
 $\angle ABD = \angle CBD$, $\therefore \angle BAD + \angle ABD = \angle CAD +$
 $\angle CBD$. $\because \angle CAD = \angle CBE$, $\therefore \angle BAD + \angle ABD =$
 $\angle CBE + \angle CBD$. $\because \angle BDE = \angle BAD + \angle ABD$,
 $\angle DBE = \angle CBE + \angle CBD$, $\therefore \angle BDE = \angle DBE$.
 $\because \angle BDE + \angle DBE + \angle E = 180^\circ$, $\angle E = \angle BCA =$
 50° , $\therefore 2\angle BDE + 50^\circ = 180^\circ$, $\therefore \angle BDE = 65^\circ$, 故
 答案为 65 .

10. $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$

思路分析 圆与坐标轴相结合求弧长

欲求 \widehat{FC} 的长度
 \downarrow
 求 $\angle FOC$ 的度数 + 半径 OC 的长
 \downarrow \downarrow
 证 $\triangle OBC \cong \triangle FGO$ $OE^2 = OA^2 + AE^2$
 \downarrow \downarrow
 $\angle FOC = 90^\circ$ $OC = \sqrt{5}$

【解析】设点 $A(a,0)$, 则 $AB = 2-a$, 由对称性
 可知 $GO = OA = a$. 根据题意可得, $BC = AB = 2-a$, 在 $\text{Rt} \triangle OBC$ 中, $OC^2 = OB^2 + BC^2 = 2^2 + (2-a)^2 = 8-4a+a^2$. 在 $\text{Rt} \triangle OAE$ 中, $OE^2 = OA^2 +$

思路分析

(2) 先由
 $\angle PAB = 90^\circ$ 得
 出 BP 是 $\odot O$
 的直径, 然后
 连结 OC 交
 AB 于 M 点,
 由垂径定理得
 $AM = MB = 5$,
 从而证明 OC
 是 $\triangle BPQ$ 的
 中位线, 得
 $OC = \frac{1}{2}PQ =$
 13 , 再由勾股
 定理得 $OM =$
 $\sqrt{BO^2 - BM^2} =$
 12 , 最后由中
 位线的性质得
 $AQ = 2CM$, 即
 可得出答案.

关键点拨

根据 D 是
 $\triangle ABC$ 的内
 心, 得出 AD ,
 BD 分别平分
 $\angle BAC, \angle ABC$
 是本题解题的
 关键.

AE^2 , 又 $\because OE = OC, AE = AG = 2a$, $\therefore 8-4a+a^2 =$
 $a^2 + (2a)^2$, 解得 $a = 1$ 或 -2 (舍去), \therefore 点 $A(1,$
 $0)$, $GO = BC = AB = 1, AG = FG = AE = 2$, $\therefore OC =$
 $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. 在 $\triangle OBC$ 和 $\triangle FGO$ 中,

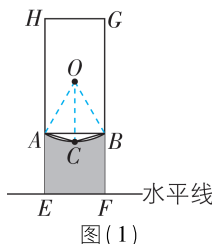
$\begin{cases} OB = FG, \\ \angle OBC = \angle FGO, \\ BC = GO, \end{cases} \therefore \triangle OBC \cong \triangle FGO (\text{S.A.S.}),$
 $\therefore \angle FOG = \angle OCB$. $\because \angle COB + \angle OCB = 90^\circ$,
 $\therefore \angle COB + \angle FOG = 90^\circ$, $\therefore \angle FOC = 90^\circ$, $\therefore \widehat{FC}$
 的长为 $\frac{90\pi \times \sqrt{5}}{180} = \frac{\sqrt{5}}{2}\pi$. 故答案为 $\frac{\sqrt{5}}{2}\pi$.

11. (1) 【证明】连结 AE , 如图.

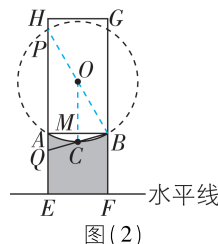
$\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径,
 $\therefore \angle AEB = 90^\circ$, 即 $AE \perp BC$.
 $\because AB = AC$,
 $\therefore E$ 是 BC 的中点.

(2) 【解】 $\because AB = AC$, $\therefore \angle B =$
 $\angle C = 70^\circ$, $\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 40^\circ$.
 $\therefore \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOD$, $\therefore \angle BOD = 80^\circ$.

12. 【解】(1) 连结 OA, OB, OC , 如图(1). $\because C$ 是
 \widehat{AB} 的中点, $\therefore \widehat{AC} = \widehat{CB}$, $\therefore \angle ABC = \angle CAB$.
 $\because \angle ACB = 150^\circ$, $\therefore \angle ABC = \angle CAB = 15^\circ$,
 $\therefore \angle AOC = \angle BOC = 30^\circ$, $\therefore \angle AOB = 60^\circ$. 又
 $\because OA = OB$, $\therefore \triangle OAB$ 是等边三角形, $\therefore OA =$
 $OB = AB = 10$, $\therefore \widehat{AB}$ 的长为 $\frac{60}{180}\pi \times 10 = \frac{10}{3}\pi$.



图(1)



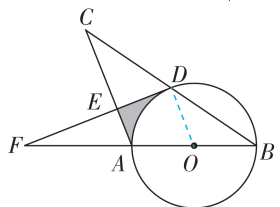
图(2)

(2) 如图(2), 连结 PB . 由题意易得 $\angle PAB =$
 90° , $\therefore BP$ 是 $\odot O$ 的直径. 连结 OC 交 AB 于
 M 点, 则 $OC \perp AB$, $\therefore AM = MB = 5$. $\because \angle PAB =$
 $\angle OMB = 90^\circ$, $\therefore OC \parallel EH$, $\therefore \frac{BC}{CQ} = \frac{OB}{OP} = 1$, $\therefore C$
 为 BQ 的中点, $\therefore OC$ 是 $\triangle BPQ$ 的中位线.
 $\therefore EQ = 12, EP = 38$, $\therefore OC = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}(EP -$
 $EQ) = 13 = OB$, $\therefore OM = \sqrt{BO^2 - BM^2} =$
 $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$, $\therefore CM = OC - OM = 1$. $\because C$ 是
 BQ 的中点, $AM = MB$, $\therefore CM$ 是 $\triangle ABQ$ 的中位
 线, $\therefore AQ = 2CM = 2$.

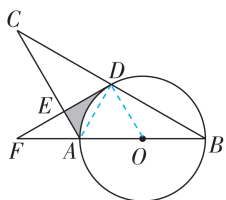
13. (1) 【证明】如图(1), 连结 OD . $\because AB = AC$,
 $\therefore \angle B = \angle C$. 又 $\because OB = OD$, $\therefore \angle B = \angle ODB$,
 $\therefore \angle ODB = \angle C$, $\therefore AC \parallel OD$. $\because DF \perp AC$,
 $\therefore OD \perp DF$. 又 $\because OD$ 为 $\odot O$ 的半径, $\therefore DF$ 是
 $\odot O$ 的切线.

(2) 【解】如图(2), 连结 AD, OD , 设 $\odot O$ 半径
 为 r . 在 $\text{Rt} \triangle CED$ 中, $CE = \sqrt{3}, CD = 2$, $\therefore ED^2 =$
 $CD^2 - CE^2 = 2^2 - (\sqrt{3})^2 = 1$. 又 $\because \cos C = \frac{CE}{CD} =$
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore \angle C = 30^\circ$, $\therefore \angle B = 30^\circ$, $\therefore \angle AOD =$

60°. $\therefore AC \parallel OD$, O 为 AB 的中点, \therefore 易知 D 是 BC 的中点, $\therefore CD=BD=2$. $\therefore AB$ 是 $\odot O$ 的直径, $\therefore \angle ADB = 90^\circ$, $\therefore AD = \frac{1}{2} AB = r$. 又 $\therefore AD^2 + BD^2 = AB^2$, $\therefore r^2 + 2^2 = (2r)^2$, $\therefore r = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\therefore AE = AC - CE = AB - \sqrt{3} = 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\therefore S_{\text{阴影部分}} = S_{\text{梯形}AOED} - S_{\text{扇形}AOD} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \right) \times 1 - \frac{60\pi}{360} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\pi}{9}$.



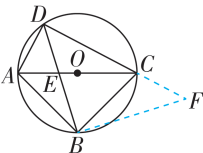
图(1)



图(2)

14. (1) 【证明】 $\therefore DB$ 平分 $\angle ADC$, $\therefore \angle ADB = \angle BDC$, $\therefore AB = BC$.

【解】(2) 如图, 延长 DC 到点 F , 使得 $CF = AD$, 连结 BF . \therefore 四边形 $ABCD$ 内接于 $\odot O$, $\therefore \angle DAB + \angle DCB = 180^\circ$. $\therefore \angle BCF + \angle DCB = 180^\circ$, $\therefore \angle DAB = \angle BCF$. 由(1)知 $AB = BC$.



在 $\triangle ADB$ 和 $\triangle CFB$ 中, $\begin{cases} AD = CF, \\ \angle DAB = \angle BCF, \\ AB = BC, \end{cases}$

思路分析

(3) 由题意可证得 $\triangle ADE \sim \triangle BCE$, 设 $AD:BC = S_{\triangle ADE}:S_{\triangle DEC} = 1:k$, 推出 $DE:EC = AE:EC$, 得到 $DE = AE$, 证出 $\triangle AEB \cong \triangle DEC$, 则 $S_{\triangle DEC} = S_{\triangle AEB} = kS_{\triangle AED}$, 再根据 $S_{\triangle BEC} = S_{\triangle AEB} + S_{\triangle AED}$ 求出 k , 由 $\triangle CEB \sim \triangle DCB$ 得出 $\left(\frac{BC}{DB}\right)^2 = \frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle BCD}} = \frac{k^2 S_{\triangle AED}}{k^2 S_{\triangle AED} + k S_{\triangle AED}} = \frac{k}{k+1}$, 即可得出结论.

$\therefore \triangle ADB \cong \triangle CFB$ (S. A. S.), $\therefore \angle FBC = \angle DBA$, $BD = BF$. $\therefore AC$ 为直径, $\therefore \angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$, $\therefore \angle ABD + \angle DBC = 90^\circ$, $\therefore \angle FBC + \angle DBC = 90^\circ$, 即 $\angle DBF = 90^\circ$.

又 $\therefore BD = BF$, $\therefore DF^2 = 2BD^2$,

$\therefore \frac{DF}{BD} = \sqrt{2}$. $\therefore AD = CF$, $\therefore DA + DC = DC + CF =$

DF , $\therefore \frac{DA+DC}{DB} = \sqrt{2}$.

(3) 由题可知 $\angle ADB = \angle ACB$, $\angle AED = \angle BEC$, $\therefore \triangle ADE \sim \triangle BCE$, $\therefore AD:BC = DE:EC$. 设 $AD:BC = S_{\triangle ADE}:S_{\triangle DEC} = 1:k$, $\therefore S_{\triangle BEC} = k^2 S_{\triangle AED}$, $DE:EC = 1:k$, $S_{\triangle ADE}:S_{\triangle DEC} = AE:EC = 1:k$,

$\therefore DE:EC = AE:EC$, $\therefore DE = AE$. $\therefore \angle BAC = \angle BDC$, $\angle AEB = \angle DEC$, \therefore 在 $\triangle AEB$ 和

$\triangle DEC$ 中, $\begin{cases} \angle BAC = \angle BDC, \\ AE = DE, \\ \angle AEB = \angle DEC, \end{cases} \therefore \triangle AEB \cong \triangle DEC$ (A. S. A.), $\therefore S_{\triangle DEC} = S_{\triangle AEB} = kS_{\triangle AED}$.

$\therefore S_{\triangle BEC} = S_{\triangle AEB} + S_{\triangle AED}$, $\therefore S_{\triangle BEC} = S_{\triangle AED} + kS_{\triangle AED}$, $\therefore k^2 S_{\triangle AED} = kS_{\triangle AED} + S_{\triangle AED}$, $\therefore k^2 = k + 1$,

解得 $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (负值已舍去). $\therefore \angle ADB =$

$\angle BDC = \angle ACB$, $\angle DBC = \angle DBC$,

$\therefore \triangle CEB \sim \triangle DCB$, $\therefore \left(\frac{BC}{DB}\right)^2 = \frac{S_{\triangle BEC}}{S_{\triangle BCD}} =$

$\frac{k^2 S_{\triangle AED}}{k^2 S_{\triangle AED} + k S_{\triangle AED}} = \frac{k}{k+1}$, $\therefore \left(\frac{BC}{DB}\right)^2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

第28章 样本与总体

28.1 抽样调查的意义

刷基础

1. D 【解析】人口普查的目的是全面掌握全国人口的基本情况, 故人口普查采用普查方式的理由是人口普查需要获得全面准确的信息. 故选 D.

2. D 【解析】①调查长江中现有鱼的种类, 适合抽样调查, 符合题意; ②乘坐高铁前的安检, 适合普查, 不符合题意; ③了解某市家庭年收支情况, 适合抽样调查, 符合题意; ④审查某篇文章的错别字, 适合普查, 不符合题意. 故适合抽样调查的为①③, 故选 D.

3. C 【解析】对载人航天器“神舟十八号”零部件的检查, 宜采用普查方式, 故原说法错误, A 不符合题意; 为了解一批安全头盔的质量是否符合国家标准, 宜采用抽样调查方式, 故原说法错误, B 不符合题意; 调查杭州亚运会运动员是否使用兴奋剂的情况, 宜采用普查方式, 故原说法正确, C 符合题意; 了解某班学生每日的体温情况, 宜采用普查方式, 故原说法错误, D 不符合题意. 故选 C.

4. A 【解析】某县为了解果农去年的收入情况, 从全县果农中抽取 100 户果农进行调查, 这 100 户果农去年的收入是总体的一个样

关键点拨

样本是总体中所抽取的一部分个体, 而样本容量则是指样本中个体的数目.

刷有所得

选择普查还是抽样调查要根据所要调查的对象的特征灵活选用, 一般来说, 对于具有破坏性、无法进行普查、调查的意义或价值不大的调查, 应选择抽样调查, 对于精确度要求高的调查、事关重大的调查往往选用普查.

本, 故选 A.

5. 100 名学生的体重 100 【解析】在这个问题中样本是 100 名学生的体重, 样本容量是 100. 故答案为 100 名学生的体重, 100.

6. ②④ 【解析】①1 500 名学生的心理健康评估报告是总体, 故①不符合题意; ②每名学生的心理健康评估报告是个体, 故②符合题意; ③被抽取的 300 名学生的心理健康评估报告是总体的一个样本, 故③不符合题意; ④300 是样本容量, 故④符合题意. 故答案为②④.

7. D 【解析】

- | | |
|---|------------------------------------|
| A | 方案一只调查了导游, 样本不具有代表性, 选项 A 不符合题意 |
| B | 方案二只调查了洛阳的游客, 样本不具有广泛性, 选项 B 不符合题意 |
| C | 方案三只调查了开封的游客, 样本不具有广泛性, 选项 C 不符合题意 |
| D | 方案四调查了三个城市的游客, 样本具有广泛性, 选项 D 符合题意 |

8. 【解】(1) 不合理. 理由: 前 5 名同学成绩的平